Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

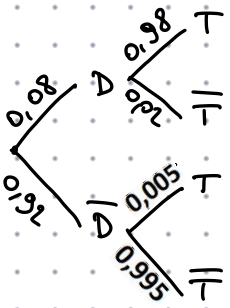
Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Spécialité mathématiques - Sujet 2021 - Amérique du Nord J1

Exercice 1

Partie A

1)



2) $\{D ; \overline{D}\}$ est un système complet d'évènement fini de probabilités non nulle ($P(D) \neq 0$ et $P(\overline{D}) \neq 0$).
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$$
$$= P(D) \times P_D(T) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T)$$
$$= 0,08 \times 0,98 + 0,92 \times 0,05$$

$P(T) = 0,083$

3) a) On cherche à calculer $P_T(D)$.
Comme $P(T) \neq 0$ (q°2), on a

$$P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)}$$
$$= \frac{P(D) \times P_D(T)}{P(T)}$$
$$= \frac{0,08 \times 0,98}{0,083}$$

$P_T(D) = 0,944$

b) D'après la q°2a : $P_T(D) = 0,944 < 0,950$ donc la condition de commercialisation n'étant pas vérifiée, le test ne pourra pas être vendu.

Partie B

1) a) On réalise une répétition de 5 épreuves de Bernoulli de manières identiques et indépendantes dont le succès "l'athlète présente un test positif" a pour probabilité 0,103.
X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès, donc X suit une loi binomiale :

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(5 ; 0,103)$

b) X suivant une loi binomiale, on a :

$$E(X) = 5 \times 0,103$$

$E(X) = 0,515$

Sur un très grand nombre de groupe de cinq athlètes testés, la moyenne des athlètes testés positivement sera de 0,515.

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$
$= 1 - P(X = 0)$
$= 1 - \binom{5}{0} 0,103^0 \times 0,897^5$
$= 1 - 0,897^5$

$P(X \geq 1) = 0,419$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; 0,103)$.

$P(X \geq 1) \geq 0,75 \iff 1 - P(X = 0) \geq 0,75$
$\iff 1 - 0,897^n \geq 0,75$
$\iff 0,897^n \leq 0,25$
$\iff n \ln(0,897) \leq \ln(0,25)$
(par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$)
$\iff n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,897)}$
(car $\ln(0,897) < 0$)

On doit donc prendre $n \geq 13$ pour que la probabilité qu'au moins un athlète soit positif soit supérieure à 0,75.

Exercice 2

1) Selon le modèle, on a :
- en 2021 : $u_1 = 0,4095$
- en 2022 : $u_2 \approx 0,288$

(u_n) semble décroissante.

2) f est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme produit de fonction qui le sont :
$\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = 0,75(1-0,15x) + 0,75x \times (-0,15)$
ie $\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = -0,225x + 0,75$

x	0		1
$f'(x)$		+	
f	0	↗	0,6375

3) Soit $x \in [0 ; 1]$.

$f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x$
$\iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0$
$\iff x(0,75(1-0,15x) - 1) = 0$
$\iff x(-0,1125x - 0,25) = 0$
$\iff x = 0$ ou $-0,1125x - 0,25 = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = -\frac{2500}{1125} < 0$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ est $\{0\}$.

4) a) Pour tout entier naturel, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: "$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$" :

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

On a : $u_0 = 0,6$ et $u_1 = 0,4095$

donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé).

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$$

Par stricte croissance de la fonction f sur $[0;1]$ (q° 2), on a :

$$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$$

ie $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,6375 \leqslant 1$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence simple et on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$

b) D'après 4a, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers un réel ℓ appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

c) On sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_{n+1}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette expression, on a :

$$f(\ell) = \ell \iff \ell = 0 \text{ d'après la q° 3.}$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

5) a) La limite de (u_n) étant 0, cela signifie que d'après ce modèle, le nombre d'individus de cette population va se rapprocher de 0 et donc l'espèce sera menacée d'extinction.

b) La valeur renvoyée est $n = 11$.

Cela signifie qu'en 2031, la population comptera moins de 20 individus et donc sera menacée d'extinction.

Exercice 3

1) Dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}, \vec{AE})$, on a

$A(0;0;0)$ $\quad K(0;0;1/2)$

$I(1/2;0;1)$ $\quad H(0;1;1)$

Donc :

$\vec{AI}(1/2;0;1)$ et $\vec{KH} = (0;1;1/2)$

On a $\frac{0}{1/2} \neq \frac{1/2}{1}$, donc $\vec{AI}$ et $\vec{KH}$ ne sont pas colinéaires et donc (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

2) a) $I(1/2;0;1)$ et $J(1;1/2;0)$

b) $\vec{IJ} = (1/2;1/2;-1)$

$\vec{AE} = (0;0;1)$

$\vec{AC} = (1;1;0)$

On remarque que : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AE}$

Donc les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$ sont bien coplanaires.

3) Un coefficient directeur de :

- d_1 est $\vec{u_1} = (1;-2;3)$
- d_2 est $\vec{u_2} = (1;1;2)$

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi d_1 et d_2 ne sont pas parallèles

4) Un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = (1;3;-2)$

On a :

$$\vec{n} \cdot \vec{u_2} = 1\times1 + 3\times1 + 2\times(-2) = 0$$

$\vec{n}$ et $\vec{u_2}$ sont donc orthogonaux, et $\vec{n}$ étant normal au plan cela signifie donc que $\mathcal{P}$ et d_2 sont parallèles.

5) On a : $\vec{LM} = (1;3;-2) = \vec{n}$

$\vec{LM}$ est donc un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

De plus L appartient au plan $\mathcal{P}$ car :

$4 + 3\times0 - 2\times3 + 2 = 0$.

Donc L est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Exercice A

Affirmation 1 : FAUX

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

$$\left(e^{a+b}\right)^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a+2b} = e^{2a} \times e^{2b}$$

Affirmation 2 : VRAI

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -e^x + e^x(3-x)$

ie $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x(2-x)$

On a donc $f'(0) = e^0(2-0) = 2$

La tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

$T : y = f'(0)x + f(0)$

ie $T : y = 2x + f(0)$

Par ailleurs, $f(0) = -2 + (3-0)e^0 = 1$

D'où **$T : y = 2x + 1$**

Affirmation 3 : FAUX

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(e^x - 1 + \frac{3}{xe^x}\right) = +\infty$$

car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

d'où par composition $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\lambda} = 0$.

Affirmation 4 : VRAI

On note $f : x \mapsto 1 - x + e^{-x}$ définie sur $[0;2]$.

f est dérivable sur $[0;2]$ comme somme de fonctions qui le sont.

$\forall x \in [0;2]$, $f'(x) = -(1+e^{-x}) < 0$

car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		2
f	2	↘	$e^{-2}-1$

f est continue et strictement décroissante sur $[0;2]$.

De plus, $f([0;2]) = [e^{-2}-1 ; 2]$.

Or $0 \in [e^{-2}-1 ; 2]$, donc d'après le théorème de la bijection **l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution réelle sur $[0;2]$.**

Affirmation 5 : VRAI

g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x - 5 + e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = 2 + e^x$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) > 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$)

Donc g est une fonction convexe.

Exercice B

1) • **$f(1) = 4$**

• **$f'(1) = 0$** car le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1 est $f'(1) = 0$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{b/x \times x - 1 \times (a + b\ln(x))}{x^2}$

ie **$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2}$**

3) On a :

$$\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b\ln(1) = 4 \\ b - a - b\ln(1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

D'où **$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{4(1+\ln(x))}{x}$**

4) • **$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$**

car $\lim_{x\to 0^+} 4 + 4\ln(x) = -\infty$

et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

• **$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$**

En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4+4\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} + 4\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, par croissance comparée

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{-4\ln(x)}{x^2}$ (q° 2)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$f(x) \leqslant 0 \iff -\frac{4\ln(x)}{x^2} \leqslant 0$

$\iff -4\ln(x) \leqslant 0$ ($x^2 > 0$)

$\iff \ln(x) \geqslant 0$ ($-4 < 0$)

$\iff x \geqslant 1$

(par stricte croissance de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	4	↘	0

6) On sait que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \dfrac{-4/x \times x - 2x(-4\ln(x))}{x^4}$

ie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \dfrac{-4 + 8\ln(x)}{x^3}$

7) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{-4+8\ln(x)}{x^3} \geqslant 0$

$\iff -4 + 8\ln(x) \geqslant 0 \quad (x^3 > 0)$

$\iff \ln(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$

$\iff e^x \geqslant e^{1/2}$

(par croissance stricte de la fonction exponentielle)

Ainsi f est convexe sur $[e^{1/2}; +\infty[$ et concave sur $]0; e^{1/2}[$.

Ainsi il y a un unique point d'inflexion B de coordonnées $(e^{1/2}; 6e^{-1/2})$.

* * * * *

FIN

* * * * *

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.