Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 2 juin 2021 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ n° 2

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1.
- $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700$.
- $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415$.

2. **a.** On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4\,000$.

Initialisation : $u_0 = 10\,000 > 4\,000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4\,000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4\,000$, soit :

$0,95u_n > 3\,800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :

$0,95u_n + 200 > 3\,800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4\,000$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4\,000$ quel que soit le naturel n.

b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4 000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4\,000$.

3. **a.** Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$.

b. Au choix :

Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3\,800}{0,95}\right) = 0,95(u_n - 4\,000) = 0,95v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4\,000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4\,000}{u_n - 4\,000} =$

$\dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right)}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95(u_n - 4\,000)}{u_n - 4\,000} = 0,95.$

Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6\,000 \times 0,95^n$.

Or $v_n = u_n - 4\,000 \iff u_n = v_n + 4\,000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

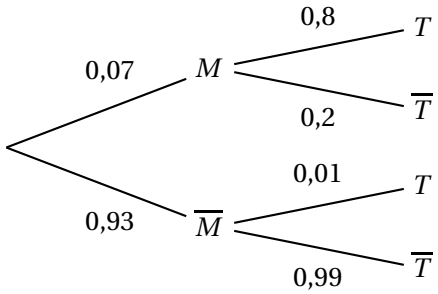
d. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6\,000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4\,000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

b. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.

3. On calcule $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$ soit $0,86$ à 10^{-2} près.

4. **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0,0653$.

b. On a $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118$, soit $0,11$ à 10^{-2} près.

5. On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$ et on veut que :

$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$ soit en prenant le logarithme népérien :

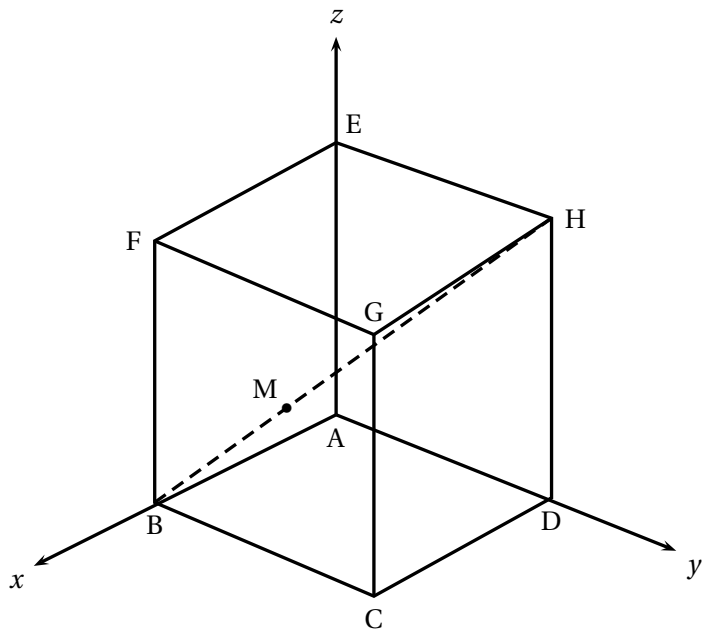
$\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n$.

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2$.

Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. Dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on a
B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1).

2. **a.** [EG], [GD] et [ED] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc EG = GD = ED = $\sqrt{2}$: le triangle EGD est équilatéral.

b. Puisque $c = \sqrt{2}$, on a $\mathscr{A}(\text{EGD}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. On a $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{BM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_\text{M}-1\\y_\text{M}-0\\z_\text{M}-0\end{pmatrix}$.

On a donc : $x_\text{M} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $y_\text{M} = \dfrac{1}{3}$; $z_\text{M} = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion : M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

4. **a.** On a $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{EG}} = -1+1+0 = 0$:

$\overrightarrow{\text{ED}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$: donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{ED}} = 0+1-1 = 0$.

Conclusion : $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.

b. On sait qu'un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ a un vecteur normal de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, donc :
$P(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EGD}) \iff -x+y+z+d=0$.

Comme E(0 ; 0 ; 1)∈ (EGD) $\iff 0+0+1+d=0 \iff d=-1$.

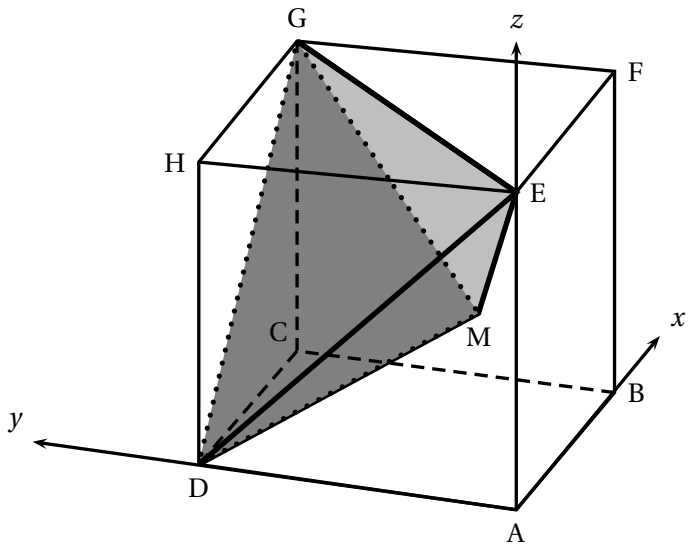
Finalement : le plan (EGD) a pour équation $-x+y+z-1=0$.

c. La droite $\mathscr{D}$ contient M et a pour vecteur directeur $\vec{n}$ vecteur normal au plan (EGD), donc avec $\overrightarrow{\text{M}P}\begin{pmatrix} x-\frac{2}{3} \\ y-\frac{2}{3} \\ z-\frac{1}{3} \end{pmatrix}$:

$P(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{M}P} = t\,\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{cases} x-\frac{2}{3} &= -t \\ y-\frac{1}{3} &= t \\ z-\frac{1}{3} &= t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= \frac{2}{3}-t \\ y &= \frac{1}{3}+t \\ z &= \frac{1}{3}+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



a. On a vu que la droite $\mathscr{D}$ contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à $\mathscr{D}$ et au plan (EGD) ; ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{3}-t \\ y &= \frac{1}{3}+t \\ z &= \frac{1}{3}+t \\ -x+y+z-1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow -\left(\tfrac{2}{3}-t\right)+\tfrac{1}{3}+t+\tfrac{1}{3}+t-1=0 \iff 3t=1 \iff t=\tfrac{1}{3}.$$

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$, on obtient :

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ z &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusion : K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

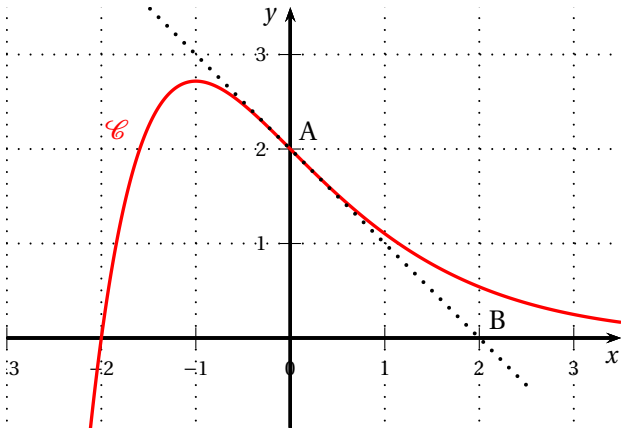
b. On en déduit $\overrightarrow{\text{KM}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

D'où $\text{KM}^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{9}$; on en déduit $\text{KM} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\mathscr{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \dfrac{1}{6}$.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

EXERCICE A



Partie 1

1. • A a pour ordonnée $f(0) = 2$;

• Le nombre dérivé $f'(0) = \dfrac{y_\text{B}-y_\text{A}}{x_\text{B}-x_\text{A}} = \dfrac{0-2}{2-0} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

2. La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle : $y' = -y + \text{e}^{-x}$.

1. On sait que les solutions de l'équation (H) : $y' = -y$ sont les fonctions $x \longmapsto K\text{e}^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

2. Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$x \longmapsto x\text{e}^{-x} + K\text{e}^{-x} = (x+K)\text{e}^{-x},\ K \in \mathbb{R}.$$

3. Avec $f(x) = (x+K)\mathrm{e}^{-x}$ et $f(0) = 2$, on a : $(0+K)\mathrm{e}^{-0} = 2 \iff K = 2$.
Conclusion : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie 3

1. **a.** Puisque f est solution de l'équation différentielle (E) ; on a donc
$f'(x) = -f(x) + \mathrm{e}^{-x} = -(x+2)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-x-2+1) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$. Donc :
$-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$;
$-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$;
$-x-1 = 0 \iff -1 = x$.
La fonction est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$, décroissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et a donc un maximum $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = \mathrm{e}$.

2. **a.** De $f'(x) = -f(x) + \mathrm{e}^{-x}$, on obtient en dérivant :
$f''(x) = -f'(x) - \mathrm{e}^{-x} = -(-x-1)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x}$.

b. D'après le résultat précédent sur $[0\ ;\ +\infty[$, $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le produit $x\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$: la dérivée seconde est positive, la fonction f est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE B

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. **a.** Sur l'intervalle $[1\,;4]$, $f'(x) = -30 + \dfrac{35}{x} = \dfrac{-30x+35}{x} = \dfrac{35-30x}{x}$.

b. Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35-30x = 5(7-6x)$ donc du facteur $7-6x$.
$7-6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \dfrac{7}{6} > x \iff x < \dfrac{7}{6}$;
$7-6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \dfrac{7}{6} <> x \iff x > \dfrac{7}{6}$;
$7-6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \dfrac{7}{6} = x \iff x = \dfrac{7}{6}$.

c. La fonction f est donc croissante sur $\left[1\ ;\ \dfrac{7}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ et a donc un maximum : $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = -30 \times \dfrac{7}{6} + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = -35 + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$.

2. f décroit sur $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ de $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$ à $f(4) = -120 + 50 + 35\ln 4 = 35\ln 4 - 70 \approx -21,5$.

x	1		$\frac{7}{6}$		α		4
f	20	↗	$\approx 20,4$	↘	0	↘	$\approx -21,4$

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{7}{6}\,;\,4\right]$, f est continue et strictement décroissante.

Comme $0 \in \left[f\left(\frac{7}{6}\right)\,;\,f(4)\right]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2) \approx 14,26$ et $f(3) \approx -1,54$, donc $2 < \alpha < 3$;
- On a $f(2,9) \approx 0,26$ et $f(3,0) \approx -1,54$, donc $2,9 < \alpha < 3,0$;
- On a $f(2,91) \approx 0,09$ et $f(2,92) \approx -0,09$, donc $2,91 < \alpha < 2,92$;
- On a $f(2,914) \approx 0,0013$ et $f(2,915) \approx -0,005$, donc $2,914 < \alpha < 2,915$.

3. On a donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. 2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx 23,9254$ soit environ 23 925 €.

2. La fonction B est dérivable sur $[1\,;\,4]$ et sur cet intervalle :

$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \dfrac{1}{x} = 50 - 30x + 35\ln x = f(x)$.

3. **a.** D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,\alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1\,;\,\alpha]$.

De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[1\,;\,\alpha]$.

Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.

b. $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln\alpha$.

En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :

$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201$, soit environ 25 420 € à l'euro près.

Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéficie maximal.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.