Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

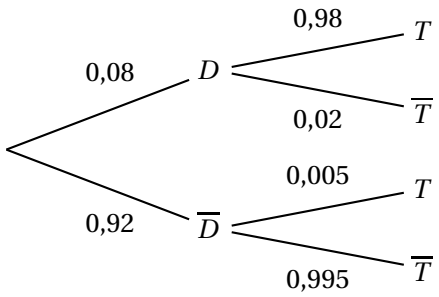
Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right)$: or
$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$ et
$P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460$. Donc :
$P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083$.

3. **a.** La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$, soit 0,945 au millième près.

b. D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. **a.** Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est $0,103$. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

b. On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

c. La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :

$0,103^0 \times (1-0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807$ soit environ 0,581 au millième près.

Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :

$1-0,581$, soit 0,419 au millième près.

2. On a pour n athlètes contrôlés, $P(X=0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.

Il faut donc trouver n tel que :

$1-0,897^n \geqslant 0,75 \iff 1-0,75 \geqslant 0,897^n \iff 0,25 \geqslant 0,897^n$.

La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n = 13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.

Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.

EXERCICE 2 **5 points**

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. • 2021 correspond à $n=1$, donc $u_1 = 0,75u_0 \times (1-0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1-0,15 \times 0,6) = 0,45 \times (1-0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$ soit environ 410 individus.

• 2022 correspond à $n=2$, donc $u_2 = 0,75u_1 \times (1-0,15u_1) = 0,75 \times 0,4095 \times (1-0,15 \times 0,4095) = 0,307125 \times (1-0,061425) = 0,307125 \times 0,938575) \approx 0,2882$ soit environ 288 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;1]$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 0,75(1-0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,1125x - 0,1125x = 0,75 - 0,225x$.

Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 0,225x \leqslant 0,225 \Rightarrow -0,225 \leqslant -0,225x \leqslant 0 \Rightarrow$

$0,75-0,225 \leqslant 0,75-0,225x \leqslant 0,75$ ou enfin $0,525 \leqslant f'(x) \leqslant 0,75$.

Sur $[0\,;1]$, $f'(x) > 0$, donc $f$est strictement croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$.

3. Sur $[0\,;\,1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0 \iff$
$x[0,75(1-0,15x)-1] = 0 \iff x(0,75-0,1125x-1) = 0 \iff x(-0,25-0,1125x) = 0 \iff$
$\begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -0,25-0,1125x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -0,25 = 0,1125x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -\frac{0,25}{0,1125} = x \end{cases}$.
Or $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$ donc dans $[0\,;\,1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** *Initialisation* : on a vu que $0 \leqslant 0,4095 \leqslant 0,6 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, on a donc : $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$,

soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1-0,15) = 0,6375 \leqslant 1$:

$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente.

c. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geqslant 0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question **3.** qu'elle n'avait que 0 comme solution.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$.

5. **a.** L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

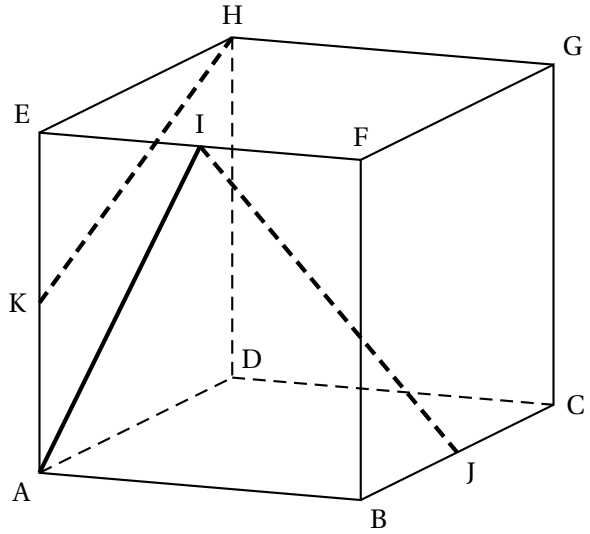
b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02

Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$

L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



En prenant le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ on a :

$$\text{A}(0\,;\,0\,;\,0),\ \text{B}(1\,;\,0\,;\,0),\ \text{C}(1\,;\,1\,;\,0),\ \text{D}(0\,;\,1\,;\,0),\ \text{E}(0\,;\,0\,;\,1)$$

$$\text{F}(1\,;\,0\,;\,1),\ \text{G}(1\,;\,1\,;\,1),\ \text{H}(0\,;\,1\,;\,1),\ \text{I}(0{,}5\,;\,0\,;\,1),\ \text{J}(1\,;\,0{,}5\,;\,0),\ \text{K}(0\,;\,0\,;\,0{,}5)$$

1. On a $\overrightarrow{\text{AI}}(0{,}5\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\text{KH}}(0\,;\,1\,;\,0{,}5)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

2. **a.** Voir plus haut.

b. On a $\overrightarrow{\text{IJ}}(0{,}5\,;\,0{,}5\,;\,-1)$, $\overrightarrow{\text{AE}}(0\,;\,0\,;\,1)$ $\overrightarrow{\text{AC}}(1\,;\,1\,;\,0)$.

On a $2\overrightarrow{\text{IJ}}+2\overrightarrow{\text{AE}}=\overrightarrow{\text{AC}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$ est donc une combinaison des vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}(1\,;\,-2\,;\,3)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(1\,;\,1\,;\,2)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles

4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{p}(1\,;\,3\,;\,-2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(1\,;\,1\,;\,2)$.

Or $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u_2}=1+3-4=0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

5. **Méthode 1**

Soit Δ la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{p}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x &= 5+1t \\ y &= 3+3t \\ z &= 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le projeté L, de M sur le plan $\mathscr{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

$$\begin{cases} x &= 5+1t \\ y &= 3+3t \\ z &= 1-2t \\ x+3y-2z+2 &= 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \Rightarrow 5+t+3(3+3t)-2(1-2t)+2=0 \iff$$

$5+t+9+9t-2+4t+2=0 \iff 14t+14=0 \iff t+1=0 \iff t=-1$.

En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$:

$$\begin{cases} x &= 5-1 \\ y &= 3+3\times(-1) \\ z &= 1-2\times(-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4 \\ y &= 0 \\ z &= 3 \end{cases}$$

Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$ est le le point L(4 ; 0 ; 3).

Méthode 2

On a $\overrightarrow{\text{ML}}(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, donc $\overrightarrow{\text{ML}} = -\vec{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

D'autre part L(4 ; 0 ; 3) $\in \mathscr{P} \iff 4+3\times 0-2\times 3+2=6-6=0$ est vraie, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A **5 points**

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\text{e}^{a+b}\right)^2 = \text{e}^{2(a+b)} = \text{e}^{2a+2b} = \text{e}^{2a}\times\text{e}^{2b}$. Donc l'affirmation est fausse.

Affirmation 2 : Une équation de la tangente t au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2+(3-x)\text{e}^x$ est :

$M(x\ ;\ y) \in t \iff y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

Or $f(0)=-2+3\text{e}^0=-2+3=1$ et

$f'(x)=-\text{e}^x+(3-x)\text{e}^x=(2-x)\text{e}^x$, d'où $f'(0)=2\text{e}^0=2$.

Donc $M(x\ ;\ y) \in t \iff y-1=2(x-0) \iff y=2x+1$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 3 : On a quel que soit le réel x : $\text{e}^{2x}-\text{e}^x+\dfrac{3}{x}=\text{e}^x\left(\text{e}^x-1+\dfrac{3}{x\text{e}^x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\text{e}^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x\text{e}^x}=0$.

Par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{e}^x-1+\dfrac{3}{x\text{e}^x}=+\infty$ et par produit de limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$. L'affirmation est fausse.

Affirmation 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{-x}$

f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = -1 - \mathrm{e}^{-x} = -(1 + \mathrm{e}^{-x}) < 0$ car quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ puis $-(1 + \mathrm{e}^{-x}) < -1 < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

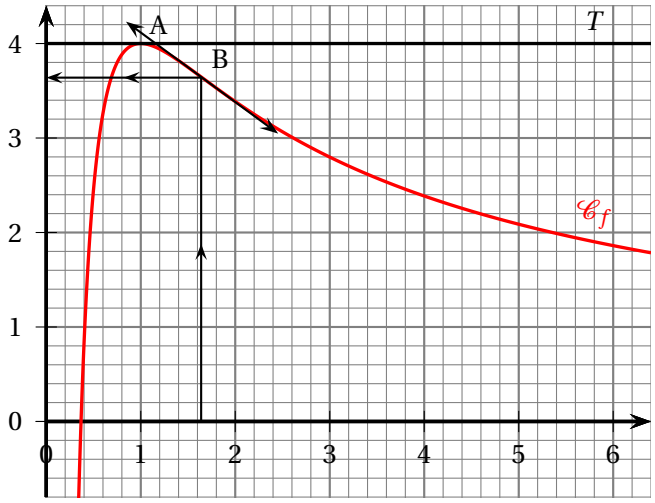
De même $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Comme $f(0) = 1 + 1 = 2 > 0$ et $f(2) = 1 - 2 + \mathrm{e}^{-2} \approx -0,86 < 0$, on a bien $0 < x_0 < 2$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 5 : On a $g'(x) = 2x - 5 + \mathrm{e}^x$ et $g''(x) = 2 + \mathrm{e}^x > 0$ comme somme de deux termes supérieurs à zéro. la fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est vraie.

EXERCICE B **5 points**



1. A(1 ; 4) $\in \mathscr{C}_f$, donc $f(1) = 4$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4) ; le coefficient directeur de cette tangente en ce point est nul ou encore le nombre dérivé est nul : $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En utilisant les résultats du **1.** :
$f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;
$f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. • $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} 4 + 4\ln x = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;

• On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + 4\dfrac{\ln x}{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc par somme :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.
On sait que sur $]0\,;\,1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,1[$;
Par contre sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$;
$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1\,;\,4)$ est le maximum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$.
La fonction f est donc croissante sur $]0\,;\,1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

6. f'étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :
$f''(x) = \dfrac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4\ln x)}{x^4} = \dfrac{-4x + 8x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3}$.

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :
$f''(x) = 0 \iff \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4 + 8\ln x = 0 \iff -1 + 2\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff$
$x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}649 \left(\text{ou } \sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3{,}639$.
Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.