Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Asie 7 juin 2021 Jour 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. On a donc $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.
Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par $0,9$; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne $\approx 1\,977$.

4. **a.** *Initialisation* : on a $u_0 = 1\,000 \leqslant 2\,500$: la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant 2\,500$.
La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leqslant 0,9 \times 2\,500$ ou $0,9u_n \leqslant 2\,250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :
$0,9u_n + 250 \leqslant 2\,250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2\,500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2\,500$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.
Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2\,500$, puis $0,1u_n \leqslant 0,1 \times 2\,500$ ou encore $0,1u_n \leqslant 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leqslant -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0,1u_n + 250$.
On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500$, soit
$v_{n+1} = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.
L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1\,500 \times 0,9^n$.
Or $v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

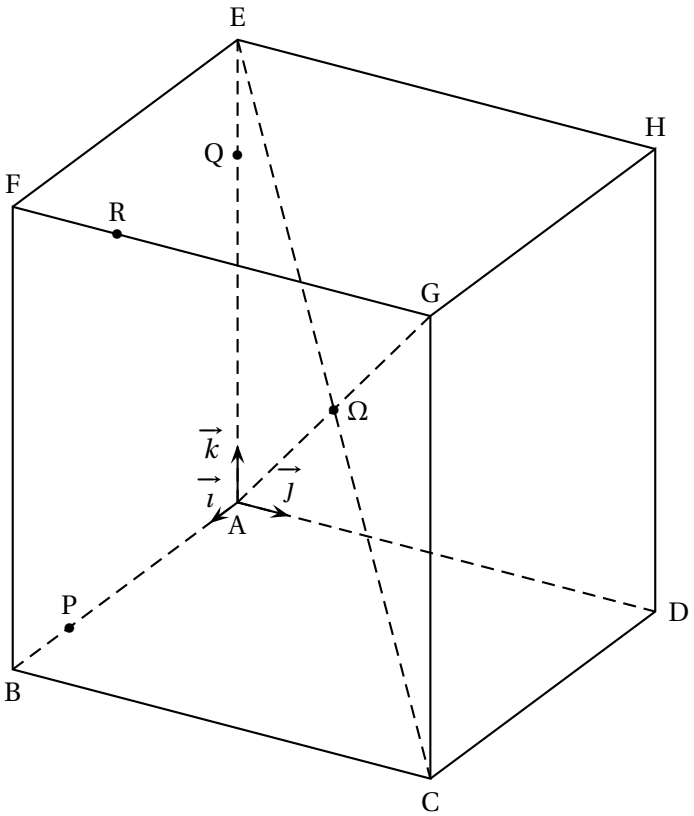
c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ et par suite par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} -1\,500 \times 0,9^n = 0$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\,500$.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.
Déterminer cette année.

```
n = 0
u = 1 000
  while u < = 2 200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
  return n
```

Le programme s'arrêtera la 16e année.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats **5 points**



Partie I

1. On a P(6 ; 0 ; 0) et Q(0 ; 0 ; 6).

2. On a $\overrightarrow{\text{PQ}}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{PR}}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$.

✦ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{PQ}} = -6+0+6 = 0$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{PQ}}$ sont orthogonaux;

✦ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{PR}} = 2-10+8 = 0$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{PR}}$ sont orthogonaux.

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan PQR est normal à ce plan.

3. D'après le résultat précédent :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQR}) \iff 1x-5y+1z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Or $\text{P}(6;0;0) \in (\text{PQR}) \iff 1\times 6-5\times 0+1\times 0+d=0 \iff d=-6$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQR}) \iff x-5y+z-6=0$.

Partie II

1. ✦ Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

✦ Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD) , elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère (AEGC) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont donc le même milieu Ω.

Comme G(8; 8; 8), les coordonnées de Ω sont donc $\left(\dfrac{0+8}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\right) = (4\,;\,4\,;\,4)$.

2. La droite (d) a donc pour vecteur directeur $\vec{n}$ et contient Ω, donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{\Omega M} = t\,\vec{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :

$$\begin{cases} x-4 &= t\times 1\\ y-4 &= t\times(-5)\\ z-4 &= t\times 1\end{cases},\ t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 4+t\\ y &= 4-5t\\ z &= 4+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

3. L est le le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).

L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x &= 4+t\\ y &= 4-5t\\ z &= 4+t\\ x-5y+z-6 &= 0\end{cases},\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow 4+t-5(4-5t)+4+t-6=0 \iff 2+2t-20+25t =$$

$$0 \iff 27t=18 \iff 9\times 3t = 9\times 2 \iff 3t=2 \iff t=\frac{2}{3}.$$

En reportant cette valeur de t dans les trois premières équations du système, on trouve que $\text{L}\left(\dfrac{14}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{14}{3}\right)$.

4. L étant le projeté orthogonal de Ω sur le plan (PQR), la distance ΩL est la distance (la plus petite) du point Ω au plan (PQR) ; on a

$\Omega L^2 = \left(\frac{14}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{14}{3}-4\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4+100+4}{9} = \frac{108}{9} = \frac{9\times 12}{9\times 1} = 12$.

On a donc $\Omega L = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats **5 points**

1. **a.** Il y a 7 tirages contenant la lettre A, puis
6 tirages contenant la lettre B (le tirage AB étant le même que le tirage BA),
5 tirages contenant la lettre C, etc.
Il y a donc : $7+6+5+4+3+2+1 = \frac{7\times 8}{2} = 7\times 4 = 28$ tirages différents.

b. Les tirages gagnant sont les 6 tirages contenant la lettre A et une consonne et les 6 contenanr la lettre E et une consonne : il y a donc $6+6=12$ tirages gagants.
La probabilité que le joueur gagne à ce jeu est donc égale à $\frac{12}{28} = \frac{4\times 3}{4\times 7} = \frac{3}{7}$.

2. **a.** On a $P(G = 10-k) = \frac{3}{7}$ et $P(G=-k) = \frac{4}{7}$. D'où le tableau :

G	$-k$	$10-k$
$P(G=\ldots)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire G est égale à
$E(G) = -k\times\frac{4}{7} + (10-k)\times\frac{3}{7} = \frac{-4k+30-3k}{7} = \frac{30-7k}{7}$.
Le jeu est favorable au joueur si :
$E(G)>0 \iff \frac{30-7k}{7} \iff 30-7k>0 \iff 7k<30 \iff k<\frac{30}{7}$.
$\frac{30}{7} \approx 4{,}3$.
La somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ne doit pas dépasser 4 €.

3. **a.** Le tirage par un joueur est indépendant de celui des autres et chacun a une probabilité de gagner de $\frac{3}{7}$; X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{3}{7}$.

b. On a $p(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(1-\frac{3}{7}\right)^{10-4} = 210\times\left(\frac{3}{7}\right)^4\times\left(\frac{4}{7}\right)^6 \approx 0{,}2466$, soit 0,247 au millième près.

c. La calculatrice donne $p(X\leqslant 4)\approx 0{,}560$ donc
$p(X\geqslant 5) = 1-p(X\leqslant 4) \approx (1-0{,}560)$.
Finalement : $p(X\geqslant 5)\approx 0{,}440$.
La probabilité qu'il y ait au moins 5 gagnants sur 10 joueurs est d'environ 0,440.

d. La calculatrice donne :
$p(X \leqslant 5) \approx 0,782$ et $p(X \leqslant 6) \approx 0,921$, donc le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$ est donc $n = 6$.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

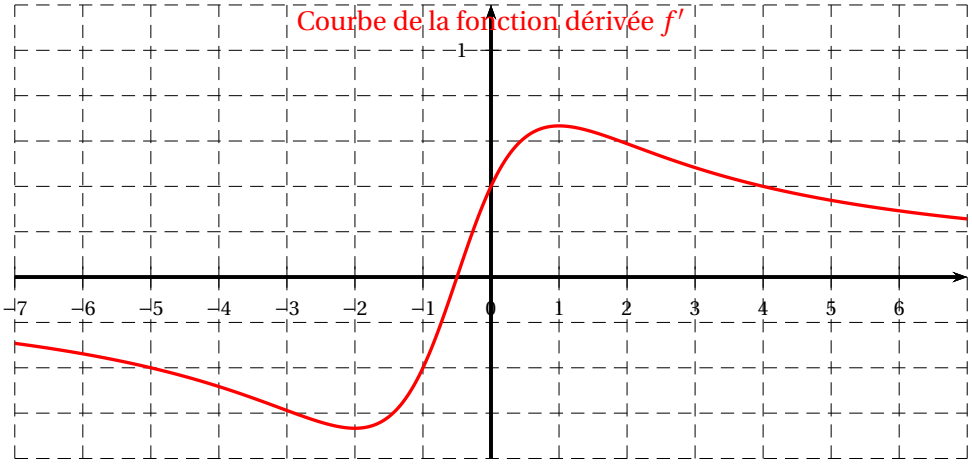
Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– convexité
– fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



1. On lit $f'(0) = 0,4 = \dfrac{2}{5}$.

2. **a.** D'après la figure :
- $f'(x)$ est croissante si $x \in [-2\ ;\ 1]$;
- $f'(x)$ est décroissante si $x < -2$ et si $x > 1$.

b. - $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Donc $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$; la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. ✦ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+\dfrac{5}{2}=+\infty$, d'où par composition de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

✦ On a $x^2+x+\dfrac{5}{2}=x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)$.

Donc $f(x)=\ln x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)=\ln x^2+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{2x^2x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)=\ln 1=0$.

Finalement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2=+\infty$.

2. On a $f(x)=\ln u(x)$, avec $u(x)=x^2+x+\dfrac{5}{2}$.

u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour le trinôme $x^2+x+\dfrac{5}{2}$, $\Delta=1-10=-9<0$, donc $x^2+x+\dfrac{5}{2}>0$ quel que soit le réel x.

La fonction $\ln u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$(\ln u)'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$.

Conclusion : quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$.

3. On a vu que $x^2+x+\dfrac{5}{2}>0$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x+1$:

✦ $f'(x)>0\iff 2x+1>0\iff x>-\dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$;

✦ $f'(x)<0\iff 2x+1<0\iff x<-\dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$.

On a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\right)=\ln\dfrac{9}{4}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$\ln\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

4. **a.** Dans la tableau précédent $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{9}{4}\approx 0{,}81$.

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ la fonction f est continue car dérivable et comme $2\in\left[\ln\frac{9}{4}\,;\,+\infty\right[$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha\in\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ tel que $f(\alpha)=2$.

b. La calculatrice donne :
$f(1) \approx 1,5$ et $f(2) \approx 2,14$, donc $\alpha \in]1\ ;\ 2[$;
$f(1,7) \approx 1,96$ et $f(1,8) \approx 2,02$, donc $\alpha \in]1,7\ ;\ 1,8[$;
$f(1,76) \approx 1,995$ et $f(1,77) \approx 2,002$, donc $\alpha \in]1,76\ ;\ 1,77[$.
Conclusion $\alpha \approx 1,8$ à 10^{-1} près.

5.

La fonction a un point d'inflexion si en ce point sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

On a $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$: cette fonction est dérivable car le dénominateur ne s'annule pas, donc sur $\mathbb{R}$:

$f''(x) = \dfrac{2\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5-4x^2-4x-1}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} =$

$\dfrac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{-2\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$; $f''(x) = \dfrac{-2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}-2\right]}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} =$

$\dfrac{-2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{-2\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$.

Comme $\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2 > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $-2(x+2)(x-1) = 2(x+2)(1-x)$, soit celui du trinôme $(x+2)(1-x)$. On en déduit le

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -2 et en 1. La courbe a donc deux points d'inflexion.

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Étude de fonction, fonction exponentielle
– Équations différentielles

Partie I

$$y' = -0,4y + 0,4$$

1. **a.** $y = K$, avec $K \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation, si, avec $y' = 0$,
$0 = -0,4K + 0,4 \iff 0,4K = 0,4 \iff K = 1$

b. ✦ On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = -0,4y$ sont les fonctions définies par : $t \longmapsto y = Ce^{-0,4t}$, avec $C \in \mathbb{R}$;
✦ Les solutions de l'équation $y' = -0,4u + 0,4$ sont donc les fonctions :

$$t \longmapsto y = 1 + Ce^{-0,4t}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

c. g définie par $g(t) = 1 + Ce^{-0,4t}$ vérifie :
$g(0) = 10 \iff 1 + Ce^{-0,4\times 0} = 10 \iff 1 + C = 10 \iff C = 9$.
On a donc $g(t) = 1 + 9e^{-0,4t}$

Partie II

1. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,4t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$.

2. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(t) = -0,4 \times 9e^{-0,4t} = -3,6e^{-0,4t}$.
Or $p(t) = \dfrac{1}{g(t)} \Rightarrow p'(t) = -\dfrac{g'(t)}{(g(t))^2} = -\dfrac{-3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2} = \dfrac{3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Le résultat précédent montre que, comme $3,6 >$, $e^{-0,4t} >$ quel que soit le réel y, $\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2 > 0$, $p'(t) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$: la fonction p est strictement croissante sur cet intervalle.
Or $p(0) = \dfrac{1}{1+9} = \dfrac{1}{10} = 0,1$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = \dfrac{1}{1} = 1$.
Par application du théorème des valeurs intermédiaires comme $\dfrac{1}{2} \in [0\,;\,1]$, il existe un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $p(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.

b. La calculatrice donne :
$p(5) \approx 0,45$ et $p(6) \approx 0,55$, donc $5 < \alpha < 6$;
$p(5,4) \approx 0,491$ et $p(5,5) \approx 0,501$, donc $5,4 < \alpha < 5,5$;
$p(5,49) \approx 0,499$ et $p(5,50) \approx 0,501$, donc $5,49 < \alpha < 5,50$.
Conclusion $\alpha \approx 5,5$ à 10^{-1} près.

Partie III

1. ✦ $p'(t) = \dfrac{3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2}$ d'après la question 2.
✦ $0,4p(t)(1-p(t)) = 0,4\times\dfrac{1}{1+9e^{-0,4t}}\times\left(1-\dfrac{1}{1+9e^{-0,4t}}\right)^2 = 0,4\times\dfrac{9e^{-0,4t}}{1+9e^{-0,4t}} = \dfrac{3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2}$,
donc p est solution de l'équation différentielle.
De plus on a vu que $p(0) = \dfrac{1}{10}$.

2. • $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$ signifie qu'à long terme toutes les écoles auront accès à internet.
• $\alpha \approx 5,5$ signifie qu'au bout de 5 ans et demi la moitié des écoles aura accès à internet.
• $p(0) = 0,1$ signifie qu'en 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.