Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Métropole 8 juin 2021 ∾

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 : On voit que pour $t = 5$, les coordonnées du point de la droite $\mathscr{D}'$ sont $(11\ ;\ -9\ ;\ -22)$ soit les coordonnées de M_2.

Réponse b.

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est : $\overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Réponse c.

Question 3 :

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u_3} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{u_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ou encore colinéaire au vecteur $-\frac{1}{3}\overrightarrow{u_3} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ayant des vecteurs directeurs colinéaires au même vecteur sont donc parallèles.
De plus en remplaçant t par $\frac{5}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}'$ on obtient $x = 1$, $y = 1$ et $z = -2$.
Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont donc confondues.

Réponse d.

Question 4 : $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{p} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{p}$ sont orthogonaux, soit :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{p} = 0 \iff -2 \times 1 + 2 \times m + 4 \times (-2) = 0 \iff -2 + 2m - 8 = 0 \iff 2m = 10 \iff m = 5$.

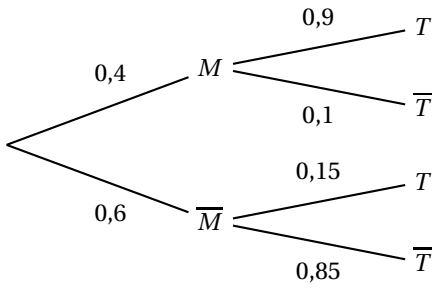
Réponse c.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. **a.** On traduit la situation par un arbre pondéré.



b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,36 + 0,09 = 0,45$.

d. Il faut trouver $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{9 \times 4}{9 \times 5} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

2. **a.** On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question **1. c.**.

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15\,504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. **a.** On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de 0,45.

On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$.

Donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n$.

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,55^n$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,55 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \leqslant n$ (car $\ln 001 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \approx 7,7$.

Conclusion : le programme renvoie la valeur 8.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4}$.

1. On peut conjecturer que quel que soit n, $\dfrac{4}{u_n} = n + 4$.

2. On veut démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$.

Alors $u_n + 4 > 4 > 0$ donc : $\dfrac{1}{u_n + 4} > 0$ et donc $\dfrac{4}{u_n + 4} > 0$

Or $u_n > 0$ (hypothèse de récurrence) donc $\dfrac{4u_n}{u_n + 4} > 0$.

Soit finalement : $u_{n+1} > 0$. ; la proposition est vraie au rang $n + 1$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n}{u_n+4} - u_n = \dfrac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n+4} = -\dfrac{u_n^2}{u_n+4}$.

Comme $u_n + 4 > 4 > 0$ d'où l'inverse $\dfrac{1}{u_n+4} > 0$ et comme $u_n^2 > 0$, $\dfrac{u_n^2}{u_n+4} > 0$ et finalement $-\dfrac{u_n^2}{u_n+4} < 0$.

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$

5. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{4}{u_{n+1}} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{4}{\frac{4u_n}{u_n+4}} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{4(u_n+4)}{4u_n} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{u_n+4}{u_n} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{u_n+4-4}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n} = 1.$

$v_{n+1} - v_n = 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

Son premier terme est $v_0 = \dfrac{4}{u_0} = \dfrac{4}{1} = 4$.

6. On sait qu'alors pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 4 + n$.

Or $v_n = \dfrac{4}{u_n} \iff u_n = \dfrac{4}{v_n}$ donc $u_n = \dfrac{4}{4+n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n = \dfrac{1}{1+\frac{n}{4}}$, donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{n}{4} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La limite de la suite (u_n) est donc 0.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT — 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme ; dérivation

Partie 1

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

1. ✦ Limite en 0 : $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to0} h(x) = -\infty$.

✦ Limite en $+\infty$: on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x\to0} h(x) = 1$. (La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la représentation graphique de h en $+\infty$.)

2. La fonction est dérivable (admis) sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.

3. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$: le signe de $h'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - 2\ln x$.

✦ $1 - 2\ln x > 0 \iff 1 > 2\ln x \iff \dfrac{1}{2} > \ln x \iff \ln x < \dfrac{1}{2}$, soit finalement $x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{ou encore } x < \sqrt{\mathrm{e}}\right)$

4. D'après les résultats précédents, on établit le tableau de variations de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

$h\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = 1 + \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \approx 1{,}18$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	↘	1

D'après ce tableau de variations, l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$.

On appelle α cette solution ; $h\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx -1,8<0$ et $h(1)=1>0$ donc $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.

5. D'après les questions précédentes, on peut établir le tableau signes de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f_1(x)=x-1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_2(x)=x-2-\dfrac{2\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$f_1(x)-f_2(x)=x-1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\left(x-2-\dfrac{2\ln(x)}{x^2}\right)=x-1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}-x+2+\dfrac{2\ln(x)}{x^2}=1+\dfrac{\ln(x)}{x^2}=h(x)$

2.
- On a vu que $h(x)<0$ sur $]0\,;\,\alpha[$, donc sur cet intervalle $f_1(x)<f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est en dessous de $\mathscr{C}_2$.
- On a vu que $h(x)>0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle $f_1(x)>f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_2$.
- $h(\alpha)=0$ donc $f_1(\alpha)=f_2(\alpha)$; donc α est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
- L'ordonnée de ce point d'intersection est $f(\alpha)=\alpha-1-\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}=\alpha-\left(1+\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right)=\alpha-h(\alpha)=\alpha$.
- Les deux courbes se coupent donc au point de coordonnées $(\alpha\,;\,\alpha)$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
- la fonction f' est positive sur $]-\infty\,;\,1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
- la fonction f' est négative sur $]1\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
- la fonction f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
- la fonction f' est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

D'après le cours : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (1-x-2)\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.

$f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$; on établit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	0

c. Sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$, la fonction f est strictement croissante et continue car dérivable sur cetintervalle. $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = \mathrm{e} > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.

3. $f''(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$

$\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x.

- Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est le point d'inflexion de cette courbe.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.