Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Corrigé de la session du 15 mars 2021 Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

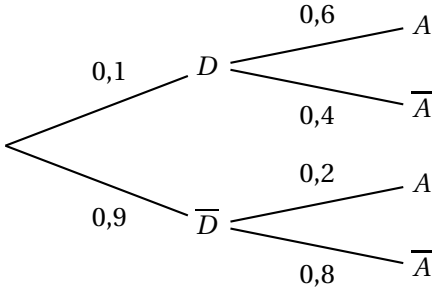
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Exercice 1, commun à tous les candidats **5 points**

Partie 1

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2. On a $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.

3. On a de même $P\left(\overline{D} \cap A\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(A) = 0,9 \times 0,2 = 0,18$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,06 + 0,18 = 0,24$.

4. On a $P_A\left(\overline{D}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(A)} = \dfrac{P\left(\overline{D} \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

Partie 2

1. **a.** Les paramètres de cette loi sont $n = 7$ et $p = 0,24$.

b. On a $P(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24 \times (1 - 0,24)^{7-1} = 7 \times 0,24 \times 76^6 \approx 0,324$ soir environ 0,32 au centième près.

c. On a $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,146 - 0,324$ soit environ 0,53.

2. **a.** On a $P_n = 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.

b. La probabilité d'avoir au moins un candidat reçu est $1 - P_n = 1 - 0,76^n$.
Il faut donc résoudre $1 - 0,76^n \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,99 \geqslant 0,76^n$ ou $0,01 \geqslant 0,76^n$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
$\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,76 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,76}$.
Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,76} \approx 16,7$. Il faut donc présenter au moins 17 candidats.

Exercice 2, commun à tous les candidats **5 points**

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

b. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$: ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de zéro.

2. le dénominateur étant non nul, la fonction f quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times x - 1 \times \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

3. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, , $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$; le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$:

- Sur $[0\,;\,1]$, $x-1<0$, donc $f'(x)<0$: la fonction f est décroissante de $+\infty$ à $f(1) = \mathrm{e}$;
- Sur $[1\,;\,+\infty]$, $x-1>0$, donc $f'(x)>0$: la fonction f est croissante de $f(1) = \mathrm{e}$ à $+\infty$;
- $f(1) = \mathrm{e}$ est donc le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

4. On voit f prend toutes les valeur réelles de e à plus l'infini, donc :

- Si $m > \mathrm{e}$: l'équation $f(x) = m$ a deux solutions ;
- Si $m = \mathrm{e}$: l'équation $f(x) = \mathrm{e}$ a une solution : 1 ;
- Si $m < \mathrm{e}$: l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution.

5. **a.** Δ a pour coefficient directeur -1, donc la tangente aussi et ce coefficient directeur est égal au nombre dérivé $f'(a) = \dfrac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2}$. D'où :

$\dfrac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^a(a-1) = -a^2 \iff \mathrm{e}^a(a-1) + a^2 = 0$.

Donc a doit être solution dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.

b. Sur $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$g'(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + 1 \times \mathrm{e}^x + 2x = \mathrm{e}^x(x-1+1) + 2x = x\mathrm{e}^x + 2x$.

On voit que $g'(x)$ est la somme de deux termes positifs donc est positive sur $]0\,;\,+\infty[$.

On a $g(0) = 1 \times (-1) + 0 = -1 = 1$.

La fonction g est donc croissante de -1 à plus l'infini car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$.

c. De la question précédente et en appliquant le théorème de la bijection on déduit que f s'annule une seule fois sur $[0\,;\,+\infty[$; il existe donc $a \in]0\,;\,+\infty[$ unique tel que

$f(a) = 0$.

La calculatrice donne $a \approx 0,74$.

Exercice 3, commun à tous les candidats **5 points**

1. Les droites (AC) et (SB) ne sont pas coplanaires :

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I}\,;\,\overrightarrow{\text{IC}},\,\overrightarrow{\text{IB}},\,\overrightarrow{\text{IS}}\right)$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,\text{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\text{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,\text{C}(1\,;\,0\,;\,0);\text{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,\text{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont : On a K$(0\,;\,-0,5\,;\,0,5)$ et L$(0,5\,;\,0,\,;\,0,5)$ donc N$(0,25\,;\,-0,25\,;\,0,5) = \left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont : $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

4. *Méthode* 1

On voit que la seule représentation dont le vecteur directeur a pour coordonnées $(1\,;0\,;1)$ est la troisième.

De plus la valeur $t=-1$ donne les coordonnées de A et la valeur $t=0$ donne les coordonnées de S. Donc réponse **c.**

Méthode 2 $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AS}) \iff$ il existe $u \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\text{A}M} = u\overrightarrow{\text{AS}}$ $(u \in \mathbb{R}) \iff$

$$\begin{cases} x-(-1) &= 1\times u \\ y-0 &= 0\times u \\ z-0 &= 1\times u \end{cases} (u\in\mathbb{R}) \iff \begin{cases} x &= -1+u \\ y &= 0 \\ z &= u \end{cases} (u\in\mathbb{R}).$$

En posant $-1+u=t$ ou encore $u=1+t$ le système devient en remplaçant u par $1+t$:

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AS}) \iff \text{il existe } t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 1+t \end{cases}.$$ Donc réponse **c.**

5.

On procède par élimination.

- Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas C$(1\,;\,0\,;\,0)$; on élimine **a.**
- Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas S$(0\,;\,0\,;\,1)$; on élimine **c.**
- Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas B$(0\,;\,1\,;\,0)$; on élimine **d.**

Réponse b.

Exercice au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B. Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B. Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1.
- $u_1 = \frac{3}{4}\times 1 + 0 + 1 = \frac{3}{4}+\frac{4}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$;
- $u_2 = \frac{3}{4}\times\frac{7}{4}+\frac{1}{4}+1 = \frac{21}{16}+\frac{4}{16}+\frac{16}{16} = \frac{41}{16} = 2,5625$.

2. **a.** Dans la cellule B3 : =0,75*B2 + 0,25*A2 +1.

b. La suite (u_n) semble être croissante.

3. **a.** *Initialisation* : au rang 0 : on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$, soit $0 \leqslant 1 \leqslant 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

En multipliant par le nombre positif $\frac{3}{4}$, on a $\frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$, puis en ajoutant à chaque terme $\frac{1}{4}n+1$:

$\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}n+1 \leqslant \frac{3}{4}(n+1)+\frac{1}{4}n+1$, soit

$n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+1+\frac{3}{4}$ et enfin

$n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant (n+1)+1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: on a démontré par le principe de récurrence que quel que soit le naturel n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. Les termes de la suite sont encadrés par des entiers consécutifs de plus en plus grands, donc la suite est croissante.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, par le principe d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. .

c. On a pour tout naturel $n \geqslant 1$: $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ soit en multipliant par $\frac{1}{n}$ non nul : $\frac{n}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n}{n+1}$ ou

$1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n}{n+1}$.

Or comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, par le principe d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n$.

Cette égalité montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = u_0 = 1$.

b. On sait alors que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Or $v_n = u_n - n \iff u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour tout x réel strictement positif, on a : $f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$

D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 4\frac{\ln(x)}{x} = 1$

Puis, par limite du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

Comme par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4 - \frac{3}{x} = 4$, par limite de la somme, on en conclut :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-4\dfrac{\ln(x)}{x}\right)+4-\dfrac{3}{x} = +\infty$.

2. On a $f'(x) = 1-4\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2}$.

3. **a.** On sait que sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme x^2-4x+3.

Or $x^2-4x+3 = (x-2)^2-4+3 = (x-2)^2-1 = (x-2+1)(x-2-1) = (x-1)(x-3)$.

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]1\,;3[$ où $f'(x)<0$.

Conclusion : la fonction f est croissante sur $]0\,;1[$, décroissante de $]1\,;3[$ et croissante sur $]3\,;\,+\infty[$.

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$6-4\ln 3\approx 1{,}6$	↗	$+\infty$

b. La simple lecture ne permet pas de comparer $\dfrac{5}{3}$ et $6-4\ln 3$.

Avec $6-4\ln 3\approx 1{,}6$ et $\dfrac{5}{3}<\dfrac{6}{3}=2$, on peut affirmer qu'il existe trois antécédents de $\dfrac{5}{3}$, donc trois solutions pour l'équation $f(x)=\dfrac{5}{3}$ dans $\mathbb{R}_+$.

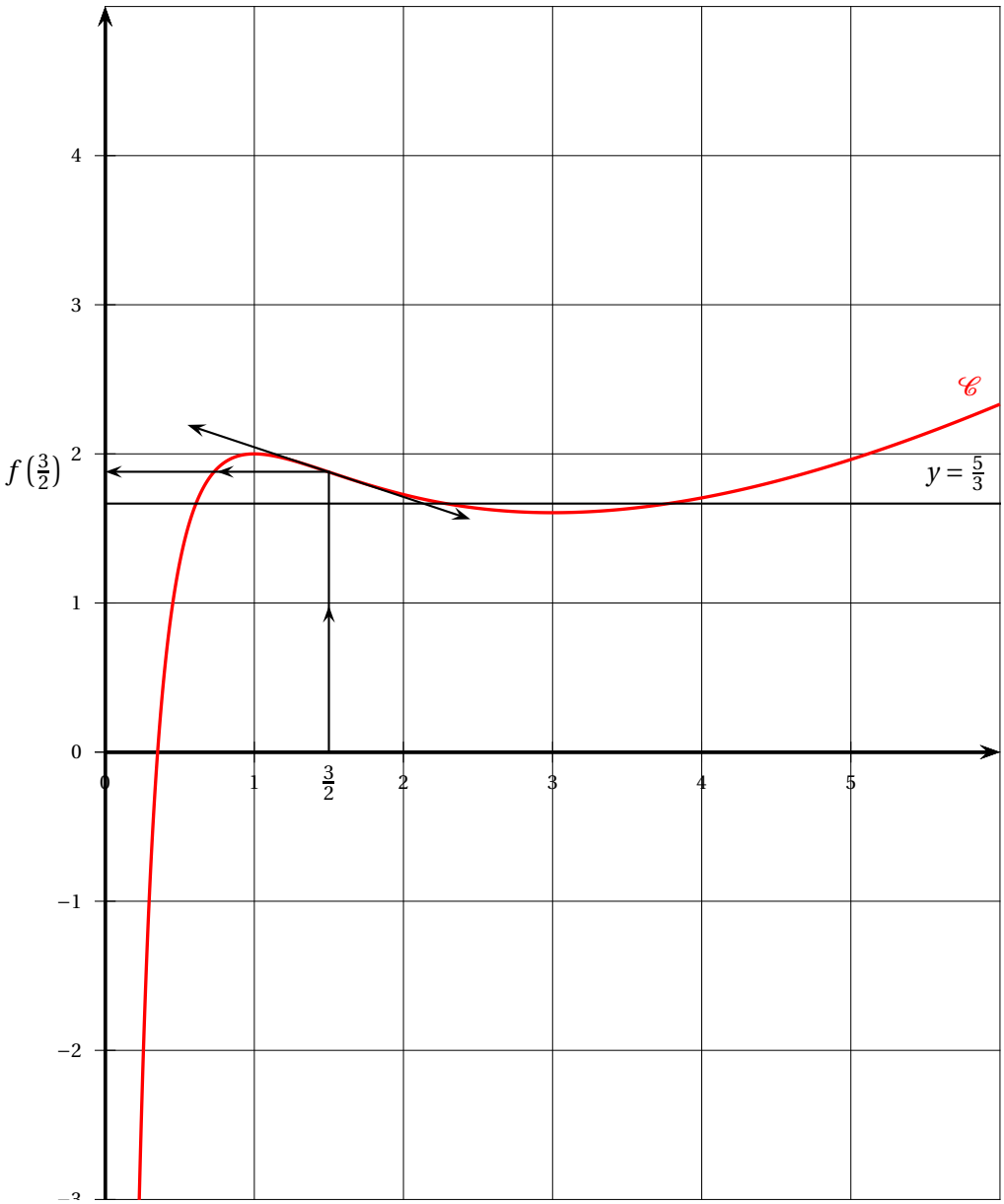
4. f' est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f''(x) = \dfrac{x^2(2x-4)-2x\left(x^2-4x+3\right)}{x^4} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+8x^2-6x}{x^4} = \dfrac{4x^2-6x}{x^4} = \dfrac{4x-6}{x^3} = \dfrac{2(2x-3)}{x^3}$.

Comme $x^3>0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2x-3$. Donc :

- Sur $]0\,;\,\frac{3}{2}[$, $f''(x)<0$: la fonction est concave ;
- Sur $]\frac{3}{2}\,;\,+\infty[$, $f''(x)>0$: la fonction est convexe ;
- $f''\left(\frac{3}{2}\right)=0$, donc $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{3}{2}$.

Son ordonnée est $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}+4-4\ln\frac{3}{2}-\dfrac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}+4-2-4\ln\frac{3}{2} = \dfrac{7}{2}-4\ln\frac{3}{2}$.


$\mathscr{C}$
$y = \frac{5}{3}$
$f\left(\frac{3}{2}\right)$
4
3
2
1
0
−1
−2
0
1
$\frac{3}{2}$
2
3
4
5

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.