Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Exercice 1

1) **Réponse c**

Justification : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2 - 2x - 3)e^x$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

par positivité de l'exponentielle et $\Delta = 16 > 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x - 1) \times e^x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x - 2xe^x - e^x$$

$$= 0$$

Car $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \to -\infty} -2xe^x = 0$ par croissance comparée.

2) **Réponse c**

Justification : $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{5 + e^x} = \frac{3}{5}$ car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{5 + e^x} = 0$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote ho

3) **Réponse b**

Justification : f'' présente 3 changements de signes donc f admet trois points d'inflexion

4) **Réponse a**

Justification : pour tout entier naturel n, on a $u_n = f(n)$

avec pour tout x réels $f(x) = x^2 - 17x + 20$

f est une fonction polynomiale avec un coefficient dominant positif (> 0).

Donc f admet un minimum en $\frac{17}{2}$ (rappel : abscisse du sommet en $-b/2a$)

Donc (u_n) est minorée.

5) **Réponse a**

Justification : la boucle while fait que dès que u dépasse la valeur 45, le script s'arrête.

Exercice 2

1) • K est le milieu de [DC], donc $K\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{1+1}{2} ; \frac{0+0}{2}\right)$

D'où $\vec{AK}(1/2 ; 1 ; 0)$

• $\vec{DL} = \frac{3}{2}\vec{AI} \Rightarrow \vec{DA} + \vec{AL} = \frac{3}{2}\vec{AI}$ (d'après la relation de Chasles)

$\Rightarrow \vec{AL} = \frac{3}{2}\vec{AI} + \vec{AD}$

D'où $\vec{AL}(0 ; 1 ; 3/2)$

2) a) $\vec{AK}$ et $\vec{AL}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL).

On a :

- $\vec{AK} \cdot \vec{n} = 1/2 \times 6 + 1 \times (-3) + 0 \times 2 = 0$
- $\vec{AL} \cdot \vec{n} = 0 \times 6 + 1 \times (-3) + 3/2 \times 2 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{AK}$ et $\vec{AL}$ donc $\vec{n}$ est normal au plan (AKL)

b) Une équation cartésienne du plan (AKL) est donc : $6x - 3y + 2z + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Trouvons la valeur de c.

Soit $c \in \mathbb{R}$.

$A \in (AKL) \Leftrightarrow 6\times0 - 3\times0 + 2\times0 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 0$.

Ainsi une équation cartésienne du plan (AKL) est : $6x - 3y + 2z = 0$

c) Δ est perpendiculaire à (AKL) donc un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{n}$.

De plus Δ passe par le point $D(0;1;0)$, d'où :

$$\Delta : \begin{cases} x = 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

d) • On a en prenant $t = 3/49$

$$\begin{cases} x = 6\times3/49 = 18/49 \\ y = 1 - 3\times3/49 = 40/49 \\ z = 2\times3/49 = 6/49 \end{cases}$$

On retrouve les coordonnées de N, donc $N \in \Delta$

• De plus, on a : $3\times\frac{18}{49} - 3\times\frac{40}{49} + 2\times\frac{6}{49} = \frac{108 - 120 + 12}{49} = 0$

N vérifie l'équation du plan (AKL) donc $N \in (AKL)$

Ainsi N est bien le projeté orthogonal de D sur (AKL)

3) a) $\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{1}{3} \times \frac{\|\vec{AD}\| \times \|\vec{DK}\|}{2} \times \|\vec{DL}\|$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1/2}{2} \times \frac{3}{2}$ (car $\vec{DL} = \frac{3}{2}\vec{AI}$)

et $\vec{DK} = \vec{DA} + \vec{AK} = (1/2 ; 1-1 ; 0)$

si $\|\vec{DK}\| = \frac{1}{2}$

$\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{1}{8}$

b) La distance de D au plan (AKL) correspond à la longueur ND. MS
Or on a : $\vec{ND}\left(-18/49 ; 9/49 ; -6/49\right)$

D'où : $ND = \|\vec{ND}\|$

$$= \sqrt{\left(-\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{9}{49}\right)^2 + \left(-\frac{6}{49}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{324+81+36}{49^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{441}}{49}$$

$$= \frac{21}{49}$$

$$ND = \frac{3}{7}$$

c) $\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AKL} \times ND \Rightarrow \mathcal{A}_{AKL} = \frac{3 \times \mathcal{V}_{ADKL}}{ND}$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{AKL} = \frac{3 \times 118}{3/7} = \frac{3}{8} \times \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{AKL} = \frac{7}{8}$$

Exercice 3

1) On assimile cela à un tirage simultanné, il y a donc $\binom{9}{3}$ placements possibles soit 84 placements possibles.

2) Il existe 8 tirages gagnants correspondant aux nombres de lignes, colonnes et diagonales de la grille (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales)
Les cœurs étant placés au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité, donc en notant V l'évènement le ticket est gagnant, on a :

$P(V) = 8/84$

ie $P(V) = 2/21$

3) On définit G la variable aléatoire correspondant au gain.
- Si le joueur gagne : $G = 5 - 1 = 4$ de probabilité $2/21$
- Si le joueur perd : $G = -1$ de probabilité $19/21$

Calculons l'espérance de G

$$E(G) = 4 \times \frac{2}{21} + \frac{19}{21} \times (-1)$$

ie $E(G) = \frac{-11}{21}$

$E(G) < 0$ donc le jeu n'est pas favorable au joueur.

4) a) On répète 20 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante, dont le succès "le ticket est gagnant" a pour probabilité $2/21$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès alors

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(20 ; 2/21)$

b) $P(X=5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15}$

ie $P(X=5) \approx 0,027$

La probabilité d'avoir exactement 5 tickets gagnants est de 0,027

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1)$
$= 1 - P(X=0)$
$= 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20}$

ie $P(X \geq 1) \approx 0,865$

La probabilité d'avoir au moins un gagnant est de 0,865.

Exercice A

Partie 1

1) $u_1 = u_0 + 0,05 \times (20 - u_0)$

ie $u_1 = 1,95$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$
$u_{n+1} = u_n + 0,05(20 - u_n)$
$= u_n + 1 - 0,05 u_n$

ie $u_{n+1} = 0,95 u_n + 1$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} = 20 - u_{n+1}$
$= 20 - 0,95 u_n - 1$
$= 19 - 0,95 u_n$
$= 0,95(20 - u_n)$

ie $v_{n+1} = 0,95 v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = 19$

c) D'après 2b, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 19 \times 0,95^n$.

Or pour tout entier naturel n, on a : $v_n = 20 - u_n$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$

3) Comme $0,95 \in]-1;1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$

Partie II

1) L est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [0;+\infty[,\ L'(t) = -19 \times (-0{,}05) \times e^{-0{,}05t}$$

ie $\forall t \in [0;+\infty[,\ L'(t) = 0{,}95e^{-0{,}05t}$

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a :

$$0{,}05(20 - L(t)) = 0{,}05 \times (20 - 20 + 19e^{-0{,}05t})$$

$$= 0{,}95e^{-0{,}05t}$$

ie $0{,}05(20 - L(t)) = L'(t)$

L est donc solution de (E)

De plus $L(0) = 20 - 19e^{0}$

ie $L(0) = 1$

2)a) On a $L'(0) = 0{,}95 \times e^{0} = 0{,}95$

et $L'(5) = 0{,}95 \times e^{-0{,}05 \times 5} \simeq 0{,}74$

D'où $L'(0) > L'(5)$

b) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} L(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 20 - 19e^{-0{,}05t}$

$$= \lim_{X \to -\infty} 20 - 19e^{X}$$

$$= 20$$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} L'(t) = 0$

car $\lim\limits_{t \to +\infty} 0{,}05(20 - L(t)) = 0{,}05 \times (20 - 20) = 0$

Le résultat est bien cohérent avec le modèle exposé en début d'exercice. En effet la vitesse de croissance est dite proportionnelle à l'écart entre la taille du bambou et sa taille maximale. Or en grandissant l'écart diminue jusqu'à être presque nul donc la vitesse de croissance diminue jusqu'à être nulle.

Exercice B

Partie I

1) On a saisi : $= B2 - \ln(B2 - 1)$

2) (u_n) semble décroissante et converger vers 2.

Partie II

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x - \ln(x-1) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$

2) a) f est dérivable sur $]1;+\infty[$.

$\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$

ie $\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$

b)

x	1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Car $f(2) = 2 - \ln(2-1) = 2$.

f est donc décroissante sur $]1;2]$ et croissante sur $]2;+\infty[$

c) D'après 2b, f admet un minimum sur $[2;+\infty[$ en 2 qui est 2.

Donc $\forall x \geq 2,\ f(x) \geq 2$

Partie III

1) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: "$u_n \geq 2$".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

On a $u_0 = 10 \geq 2$
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a :
$u_n \geq 2 \iff f(u_n) \geq 2$ car f est croissante sur $[2;+\infty[$.

$\iff u_{n+1} \geq 2$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n par principe de récurrence simple et on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n$
$= -\ln(u_n - 1)$

D'après (III. 1) on a : $u_n \geq 2 \iff u_n - 1 \geq 1$
$\iff \ln(u_n - 1) \geq 0$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)
$\iff u_{n+1} - u_n \leq 0$

(u_n) est donc décroissante.

3) (u_n) est décroissante et minorée par 2 donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge vers un réel l.

4) Soit $L \in]1;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f(L) = L &\iff L - \ln(L-1) = L \\ &\iff -\ln(L-1) = 0 \\ &\iff \ln(L-1) = 0 \\ &\iff L-1 = 1 \quad \text{, par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]1;+\infty[. \\ &\iff L = 2 \end{aligned}$$

Ainsi (u_n) converge vers 2

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.