Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques - Polynésie 2022 - Sujet 2

Merci d'adresser vos remarques à anthony.le.bihan@icloud.com.

Exercice 1

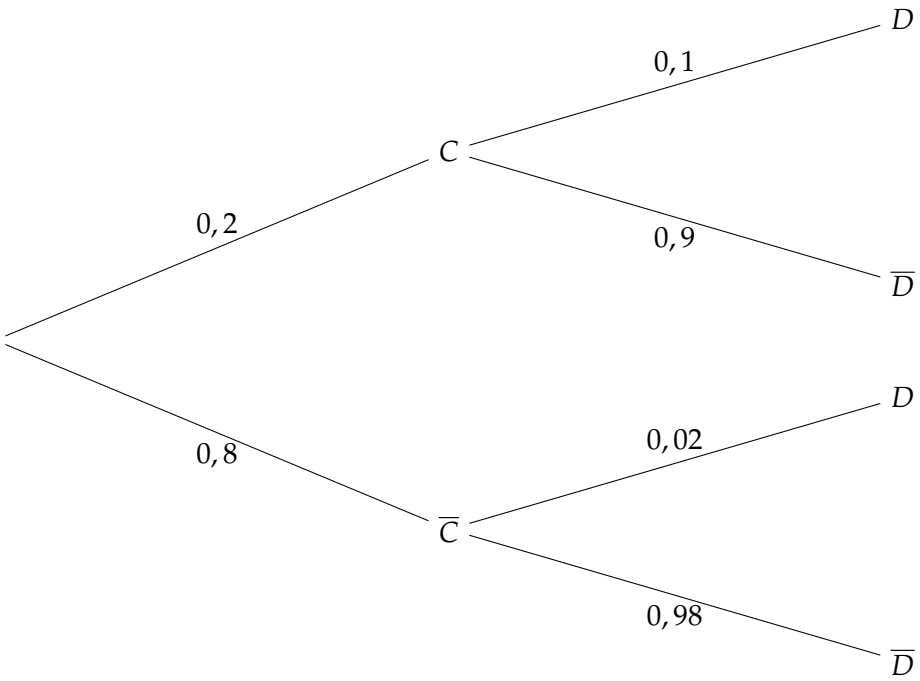
1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur un tel intervalle et,
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$
$\boxed{\text{La dérivée de } f \text{ est } \ln(x)}$
2. g peut se réécrire $g(x) = x^2 - x^2\ln(x)$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ par théorème de croissance comparée (le ln est une fonction à croissance lente tandis que la fonction carré est à croissance « normale »). Ainsi, par différence de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0}$
3. f a une racine évidente : 0. Cela permet sa factorisation $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \times (x^2 - 0,9x - 0,1)$. Étudions le polynôme de degré 2 :
$$\Delta = 0,9^2 + 4 \times 0,1 = 1,21 = 1,1^2 > 0 \implies x_1 = \frac{0,9-1,1}{2} = -0,1 \text{ et } x_2 = \frac{0,9+1,1}{2} = 1$$
Ainsi sous forme factorisée, $f(x) = x(x+0,1)(x-1)$ donc $\boxed{f \text{ possède 3 racines dans } \mathbb{R}}$
4. Dérivons une à une les expressions proposées en se rappelant que $(u \circ v)' = v' \times u'(v)$.
$$(H(2x))' = 2h(2x)$$
$$(2H(2x))' = 2 \times 2h(2x) = 4h(2x)$$
$$\left(\frac{1}{2}H(2x)\right)' = \frac{1}{2} \times 2h(2x) = h(2x)$$
$$(2H(x))' = 2 \times h(x) = 2h(x)$$
$\forall x \in \mathbb{R}$, une primitive de $k(x) = h(2x)$ est $\boxed{K(x) = \frac{1}{2}H(2x)}$;
5. D'une manière générale, l'équation de la tangente T à f au point d'abscisse a est
$$T : x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$$
Ici $a = 1$. f est dérivable sur l'ensemble des réels comme produit de telles fonctions et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$. Donc, $f'(1) = 2e$ et $f(1) = e$. Donc
$$T : x \mapsto 2e(x-1) + e \implies \boxed{y(x) = 2ex - e}$$
6. Cette question peut se faire à la calculatrice. A la main,
$$(0,2)^n < 0,001 \iff n \times \ln(0,2) < \ln(0,001) \text{ par stricte croissance du ln sur } \mathbb{R}_*^+$$
Attention erreur classique, $\ln(0,2) < 0$ donc il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on divise par $\ln(0,2)$:
$$n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$$
Application numérique : $n > 4,29$. Or, n est un entier (naturel) donc il ne peut que prendre ses valeurs dans $\{0,1,2,3,4,5,6,\dots,\}$. Donc $\boxed{n \geq 5}$.

0.1

Exercice 2

Partie 1

1. L'arbre pondéré est le suivant :



La formule des probabilités conditionnelles dit $P_C(D) = \dfrac{P(D \cap C)}{P(C)}$. Ainsi

$$P(D \cap C) = P_C(D)P(C) = 0,1 \times 0,2 \implies \boxed{P(D \cap C) = 0,02}$$

2. Le système $(C, \overline{C})$ forme un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(D \cap C) + P(D \cap \overline{C}) = P_C(D)P(C) + P_{\overline{C}}(D)P(\overline{C})$$

$P(D) = 0,02 + 0,02 \times 0,8 \implies \boxed{P(D) = 0,036}$. Cela permet indirectement de vérifier que la question 1 est juste.

3. On cherche $P_D(C)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, $P_D(C) = \dfrac{P(D \cap C)}{P(D)}$.

On utilise donc 1. et 2. : $P_D(C) = \dfrac{0,02}{0,036} \implies \boxed{P_D(C) = 0,555}$.

Partie 2

1a. On répète 35 fois de manière successive et indépendante un tirage avec remise donc le succès correspond à l'évènement « tirer un casque défectueux » qui est de probabilité 0,036 (voir Partie 1, question 2). C'est donc la répétition de 35 épreuves de BERNOULLI de paramètre $p = 0,036$. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 35$ et $p = 0,036$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(35; 0,036)}$.

1b. On cherche $P(X=1)$. Pour une loi binomiale,

$$P(X=1) = \binom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1-0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$$

On trouve $\boxed{P(X=1) = 0,362}$.

1c. $X(\Omega) = [\![0;35]\!]$ (ensemble des entiers de 0 à 35). Donc $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$. On a déjà calculé $P(X=1)$.

$$P(X=0) = \binom{35}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^{35} = 1 \times 1 \times 0,964^{35} = 0,964^{35} = 0,277$$

D'où $\boxed{P(X \leq 1) = 0,277 + 0,362 = 0,639}$.

3. L'évènement recherché correspond à $X \geq 1$ où $X \sim \mathcal{B}(n; 0,036)$. L'évènement contraire à celui recherché est « aucun casque n'est défectueux » : $P(X=0)$. Le calcul est simple :

$$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^{n-0} = 1 \times 1 \times 0,964^n = 0,964^n$$

On a donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,964^n$. On cherche donc n tel que

$$1 - 0,964^n \geq 0,99$$

Cela donne :

$$1 - 0,964^n \geq 0,99 \iff -0,964^n \geq -0,01 \iff 0,964^n \leq 0,01$$

Par croissance du ln sur R_+^*,

$$\ln(0,964^n) \leq \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,964) \leq \ln(0,01) \iff \boxed{n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)}}$$

Attention, $\ln(0,964) < 0$ donc on change le sens de l'inégalité ! L'application numérique donne $n \geq 125,6$. **Il faut donc une population de** 126 **casques pour être sûr à 99% d'entre trouver un défectueux.**

Exercice 3

1. Le nombre d'oiseaux en 2022 correspond à u_1. Par définition,

$$u_1 = 0,008 \times u_0 \times (200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 \implies \boxed{u_1 = 51,2}$$

Selon ce modèle, il y aura 51 ou 52 oiseaux en 2002.

2. $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff 0,008x(200-x) - x = 0 \iff x(1,6 - 0,008x - 1) = 0 \iff x(0,6 - 0,008x) = 0$. Un produit de 2 termes est nul si et seulement si l'un des termes est nul. Donc une solution est $x = 0$. L'autre est solution de

$$0,6 - 0,008x = 0 \iff 0,008x = 0,6 \iff x = \frac{0,6}{0,008} \iff x = 75$$

Les solutions, sur $\mathbb{R}$, de $f(x) = x$ sont $\boxed{x = 0 \text{ et } x = 75}$.

3a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0,008x \times (-1) + 0,008 \times (200 - x) = -0,008x + 0,008 \times (200 - x)$$

Finalement, en factorisant,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0,016 \times (100 - x)$$

Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff 0,016 \times (100 - x) \geq 0 \iff 100 - x \geq 0 \iff x \leq 100$. **Ainsi, sur [0,100],** $f' \geq 0$ **et** f **est croissante.**

x	0		100
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	80

Avec :
— $f(0) = 0$
— $f(100) = 0,8 \times 100 = 80$

3b. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$: c'est la propriété de récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 40$, $u_1 = 51,2$ donc on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 100$. Donc ; $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}}$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$. On veut montrer la propriété au rang suivant, $\mathcal{P}(n+1)$. On part de $\mathcal{P}(n)$ et on va construire une suite d'inégalités pour aboutir à $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc, par $\mathcal{P}(n)$,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$

Par application de f qui est croissante sur [0,100], à l'inégalité précédente,

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100)$$

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_{n+2} = f(u_{n+1})$, $f(0) = 0$ et $f(100) = 80$ d'où

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80 \leq 100$$

C'est $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc montré que $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie. Autrement dit, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100}$.
Le résultat est montré par récurrence.

3c. La question 3b. montre que :
— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 100).
D'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente.**

3d. Si on passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient, par continuité de f : $\ell = f(\ell)$. Autrement dit on doit résoudre $f(x) = x$: on l'a déjà fait en question 2.! Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 75$. $\ell = 0$ est impossible car $u_0 = 40$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, $\boxed{\ell = 75}$.

4. On peut retenir de 3. que, $u_0 = 40$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\ell = 75$. On peut donc restreindre l'inégalité de 3b. à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 40 \leq u_n \leq 75$$

Autrement dit, u_n n'atteint jamais 100! Donc, si on parcourt la fonction `seuil`, on rentre dans la boucle `while` et on n'en sort jamais! **Le programme boucle infiniment en ne renvoie donc aucune valeur**.

Exercice 4

Partie 1 : première méthode

1. Les coordonnées sont :

$$\boxed{A(0;0;0) \qquad B(1;0;0) \qquad G(1;1;1)}$$

2. Pour déterminer l'orthogonalité, il faut déterminer les vecteurs directeurs de la droite (BK) et du plan (AIG).
Droite (BK) : $\overrightarrow{BK}$ est (sans surprise) un vecteur directeur de (BK). Ses coordonnées sont

$$\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} \implies \boxed{\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Plan (AIG) : les vecteurs AI et AG sont des vecteurs directeurs du plan (AIG). Leurs coordonnées montrent qu'ils sont clairement non-colinéaires :

$$\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Montrer que (BK) est perpendiculaire au plan (AIG) revient à montrer que $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$.
— $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$
— $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
Donc $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ et donc **la droite (BK) est perpendiculaire au plan (AIG).**

3. Les coordonnées de A, I et G vérifient toutes l'équation cartésienne. Donc $\boxed{2x - y - z = 0}$ est une équation cartésienne de (AIG).
Méthode plus élégante : $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à (AIG) donc $\overrightarrow{BK}$ est un vecteur normal de (AIG). Donc $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$ est une équation cartésienne. A appartient à (AIG) donc il vérifie l'équation cartésienne : $0 + 0 + 0 + d = 0 \implies d = 0$. Donc $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$ est une équation cartésienne et en multipliant l'égalité par -2, on obtient bien : $\boxed{2x - y - z = 0}$.

4. $\overrightarrow{BK}$ est un vecteur directeur de (BK) et B est un point de cette droite. Donc, une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= x_B + x_{BK}t \\ y &= y_B + y_{BK}t \\ z &= z_B + z_{BK}t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \quad \boxed{\begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= \frac{1}{2}t \\ z &= \frac{1}{2}t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}}$$

5. L est le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG). Cela signifie 2 choses :
— $L \in (BK)$, par orthogonalité ;
— $L \in (AIG)$ par définition d'une projection.
Ainsi,

$$L \in ((BK) \cap (AIG)) \iff L \text{ vérifie } \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

La première équation provient de $L \in (BK)$ et les 3 autres de $L \in (AIG)$. En combinant ces 4 équations :

$$2x - y - z = 0 \iff 2 \times (1 - t) - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t = 0 \iff 2 - 3t = 0 \iff \boxed{t = \frac{2}{3}}$$

Le paramètre associé au point L est donc $t = \frac{2}{3}$. En injectant la valeur de ce paramètre dans l'équation paramétrique de (AIG) :

$$\begin{cases} x_L &= 1 - \frac{2}{3} \\ y_L &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ z_L &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \end{cases} \implies \boxed{\begin{cases} x_L &= \frac{1}{3} \\ y_L &= \frac{1}{3} \\ z_L &= \frac{1}{3} \end{cases}}$$

Ainsi, les coordonnées de L sont $\boxed{L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)}$

6. Par définition du projeté orthogonal de B sur (AIG), la distance entre B et (AIG) est :

$$d(B, AIG) = ||\overrightarrow{BL}||$$

Or,

$$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \implies ||\overrightarrow{BL}|| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ainsi,

$$\boxed{d(B, AIG) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Partie 2 : deuxième méthode

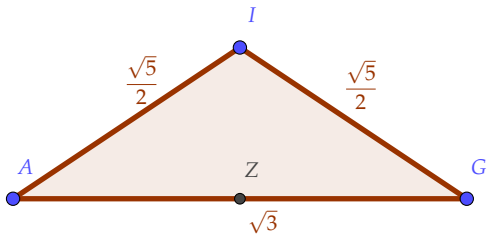
1a. La translation du segment [GF] le long du vecteur $\overrightarrow{FI}$ permet de construire le tétraèdre $ABIG$. **Donc [GF] est une hauteur relative de** (AIB).

1b. Par la formule de l'énoncé :

$$\mathcal{V}_{ABIG} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AIB} \times [GF]$$

I étant le milieu de EF, $\mathcal{A}_{AIB} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABFE} = \frac{1}{2}$. De plus, $[GF] = 1$. Donc $\boxed{\mathcal{V}_{ABIG} = \frac{1}{6}}$.

2. Définissons Z le milieu de $[AG]$ (le projeté orthogonal de I sur $[AG]$) :



Pour calculer l'aire d'un triangle isocèle, il faut faire le produit de sa base par sa hauteur et le diviser par 2. Sa base est $[AG] = \sqrt{3}$. Déterminons sa hauteur $[ZI]$. Dans le triangle AZI rectangle en Z, le théorème de PYTHAGORE dit que :

$$AI^2 = IZ^2 + AZ^2 \iff IZ^2 = AI^2 - AZ^2 \iff \boxed{IZ = \sqrt{AI^2 - AZ^2}}$$

Avec $AZ = \dfrac{1}{2}AG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc, $IZ = \sqrt{\dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi,

$$\mathcal{A}_{AIG} = \frac{[IZ] \times [AG]}{2} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Or, $\dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{3 \times 2}}{2 \times 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. D'où :

$$\boxed{\mathcal{A}_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

3. En 1b., on a calculé le volume du tétraèdre $ABIG$ en considérant la base AIB et la hauteur GF. Mais aussi voir le tétraèdre $ABIG$ en considérant la base AIG et la hauteur .... BL! (qui est bien orthogonale au plan AIG). La formule du volume de la pyramide peut donc également s'écrire :

$$\mathcal{V}_{ABIG} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AIG} \times [BL]$$

Avec $\mathcal{A}_{AIG} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ et $\mathcal{V}_{ABIG} = \dfrac{1}{6}$, on a

$$d(B, AIG) = [BL] = \frac{3\mathcal{V}_{ABIG}}{\mathcal{A}_{AIG}}$$

Or, $\dfrac{3\mathcal{V}_{ABIG}}{\mathcal{A}_{AIG}} = \dfrac{3}{6 \times \frac{\sqrt{6}}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3 \times 2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. D'où

$$\boxed{d(B, AIG) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Il est rassurant de constater, par les 2 méthodes, que la distance $d(B, AIG)$ est la même.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.