Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

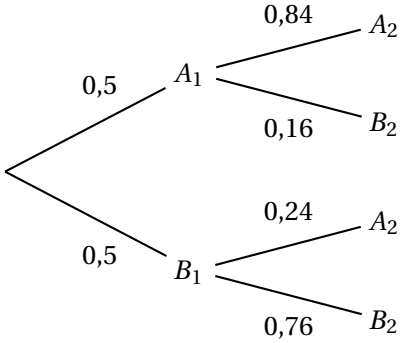
Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 2 19 mai 2022

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : probabilités, suites**

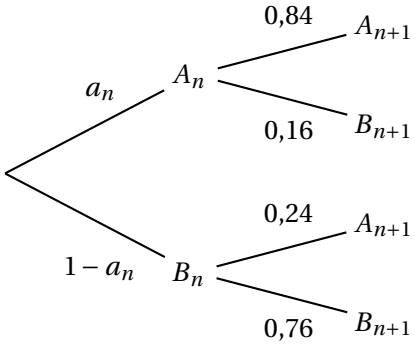
1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:
$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$
$= 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54$. Donc $a_2 = 0,54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:
$p_{A_2}(B_1) = \dfrac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$

3. **a.** On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.
L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84\ a_n + 0,24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0,84\ a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,6\ a_n + 0,24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
Initialisation : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$. L'initialisation est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
Montrons que $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.
D'après la question précédente, $a_{n+1} = 0,6\ a_n + 0,24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0,6\left(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}\right) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$. On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $0,6 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,6$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons : $a_n \geqslant 0,599$. $a_n \geqslant 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant 0,599$

$\iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0,001}{-0,1} \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.

Sachant que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100} \iff \ln\left(0,6^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{100}\right) \iff (n-1) \times \ln(0,6) \leqslant -\ln(100)$. Or $\ln(0,6) < 0$,

donc $n - 1 \geqslant \dfrac{-\ln(100)}{\ln(0,6)} \iff n \geqslant 1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0,6)}$.

À la calculatrice, $1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0,6)} \approx 10,02$ donc $n \geqslant 11$.

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

EXERCICE 2 (7 points) — Thèmes : fonctions, fonction exponentielle

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$.

$\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$ à valeurs dans $[-68\ ;\ 37]$. Or $0 \in [-68\ ;\ 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\ ;\ 4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$ (car $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $1 + x^2 \neq 0$).

$\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (1+x^2) - \mathrm{e}^x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2}$.

b. $f'(x)=0 \iff \dfrac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2}=0 \iff (x-1)^2\,\mathrm{e}^x \iff (x-1)^2 \iff x-1=0 \iff x=1.$

Et $f(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

2. **a.** Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\,;\,0]$;
- concave sur $[0\,;\,1]$;
- convexe sur $[1\,;\,4]$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x=0$ et $x=1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x\in[-3\,;\,4] : f''(x)=\dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x\in[-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x\in[-3\,;\,4]$, $\left(1+x^2\right)^3>0$ et $\mathrm{e}^x>0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x=\alpha$ et $x=1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

EXERCICE 3 (7 POINTS) — THÈMES : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

En utilisant le repère fourni $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, les points notés ont pour coordonnées : $A(6\,;\,0\,;\,2)$, $B(6\,;\,0\,;\,0)$,$C(6\,;\,8\,;\,0)$, $D(0\,;\,8\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,4)$, $F(6\,;\,0\,;\,4)$, $G(6\,;\,8\,;\,4)$, $H(0\,;\,8\,;\,4)$, $R(6\,;\,3\,;\,4)$, $T(3\,;\,0\,;\,4)$ et $S\left(3\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$.

$AR=\|\overrightarrow{AR}\|=\sqrt{0^2+3^2+2^2}=\sqrt{13}$ et $AT=\|\overrightarrow{AT}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\|\overrightarrow{AR}\|=\|\overrightarrow{AR}\|$ donc le triangle ART est isocèle en A.

b. $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT}=0\times(-3)+3\times0+2\times2=4$

c. Utilisons la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT}=\left\|\overrightarrow{AR}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AT}\right\|\times\cos\left(\widehat{\mathrm{RAT}}\right)$

donc $\cos\left(\widehat{\mathrm{RAT}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR}}{\|\overrightarrow{AR}\|\times\|\overrightarrow{AT}\|}=\dfrac{4}{\sqrt{13}^2}=\dfrac{4}{13}$ donc $\widehat{RAT}=\arccos\left(\dfrac{4}{13}\right)\approx72,1°$

2. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK}=k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\begin{cases} 0 &= k\times(-3) \\ 3 &= k\times 0 \\ 2 &= k\times 2 \end{cases}$ n'admet pas de solution. Donc ils définissent une base du plan (ART). Calculons :
$\vec{n}.\overrightarrow{AR} = 2\times 0+(-2)\times 3+3\times 2 = -6+6 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AT} = 2\times(-3)+(-2)\times 0+3\times 2 = -6+6 = 0$.
Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AR}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AT}$ donc $\vec{n}$ est normal à tout vecteur du plan (ART), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART).

b. Le plan (ART) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}$, on obtient : $(ART) : 2x-2y+3z+d=0$.
Or $A\in$ (ART) donc $12-0+6+d=0$ donc $d=-18$.
Donc le plan (ART) a pour équation $2x-2y+3z-18=0$.

3. **a.** La droite Δ est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$, vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point $S\left(3\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ 0\right)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x &= 3+2k \\ y &= \frac{5}{2}-2k \\ z &= 0+3k \end{cases}, k\in\mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x &= 3+2k \\ y &= \frac{5}{2}-2k \\ z &= 3k \end{cases}, \text{ avec } k\in\mathbb{R}.$$

b. Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

$$(S)\begin{cases} x=3+2k \\ y=\frac{5}{2}-2k \\ z=3k \\ 2x-2y+3z-18=0 \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient :

$2x-2y+3z-18=0 \iff 2(3+2k)-2\left(\frac{5}{2}-2k\right)+3\times 3k-18=0 \iff 17k-17=0 \iff k=1$

Donc $x=3+2k=5$, $y=\frac{5}{2}-2k=\frac{1}{2}$ et $z=3k=3$. Le point L a pour coordonnées $\left(5\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 3\right)$.

4. Le milieu K de $[EH]$ a donc pour coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ 4)$. N a pour coordonnées $(0\ ;\ 8-4t\ ;\ 4t)$.

Pour $t\in[0\ ;\ 1]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ND}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}0\\-4\text{t}\\4\text{t}\end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{DN} = t\times\overrightarrow{DK}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D, K et N sont alignés.

Pour vérifier que N est un point du segment $[DK]$, montrons que $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND}\leqslant 0$:

$\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix}0\\-4+4\text{t}\\4-4\text{t}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND}\begin{pmatrix}0\\4\text{t}\\-4\text{t}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND} = 0\times 0+(-4+4t)\times 4t+(4-4t)\times(-4t) = 32t^2-32t = 32t(t-1)$.

$t\in[0\ ;\ 1]$ donc $32t(t-1)\leqslant 0$ donc N est un point du segment $[DK]$.

5. Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix}-3\\\dfrac{11}{2}-4t\\4t\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0$.

$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0 \iff 2\times(-3)+(-2)\times\left(\dfrac{11}{2}-4t\right)+3\times 4t=0 \iff 20t-17=0 \iff t=\dfrac{17}{20}$. Le point N aura alors pour coordonnées : $N\left(0\,;\,8-4\times\dfrac{17}{20}\,;\,4\times\dfrac{17}{20}\right)$ soit $N\left(0\,;\,\dfrac{23}{5}\,;\,\dfrac{17}{5}\right)$

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : fonction logarithme népérien, probabilités**

1. $a=\ln(9)+\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(\sqrt{3}\right)-\ln(3)-\ln\left(3^2\right)=1\dfrac{1}{2}\ln(3)-\ln(3)=-\dfrac{1}{2}\ln(3)$

Réponse d

2. Donnons en premier le domaine de définition. Il faut que $x>0$ et $x>10$. Donc $\mathscr{D}_f=]10\,;\,+\infty[$.

Dans $\mathscr{D}_f$, $\ln(x)+\ln(x-10)=\ln(3)+\ln(7) \iff \ln(x(x-10))=\ln(3\times 7) \iff x(x-10)=21$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ou

$x^2-10x-21=0$. $\Delta=184>0$, donc ce trinôme admet deux solutions. Or $\sqrt{\Delta}=\sqrt{184}=\sqrt{4\times 46}=2\sqrt{46}$.

Les deux solution sont : $x_1=\dfrac{10-2\sqrt{46}}{2}=5-\sqrt{46}$ et $x_2=\dfrac{10+2\sqrt{46}}{2}=5+\sqrt{46}$.

Or $5^2=25<46$, donc $5<\sqrt{46} \iff 5-\sqrt{46}<0$ et $5-\sqrt{46}\notin\mathscr{D}_f$.

Par contre $\sqrt{46}>5\Rightarrow 5+\sqrt{46}>5+5=10$, donc $x_2\in\mathscr{D}_f$.

La seule solution réelle est donc $5+\sqrt{46}$. **Réponse c**.

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression $f(x)=x^2(-1+\ln(x))$. Elle est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=2x\times(-1+\ln(x))+x^2\times\dfrac{1}{x}=-2x+2x\ln(x)+x=-x+2x\ln(x)=x(2\ln(x)-1)$.

$f'(x)=0 \iff x(2\ln(x)-1)=0 \iff 2\ln(x)-1 \iff \ln(x)=\dfrac{1}{2} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$. La tangente au point d'abscisse $a=\sqrt{\mathrm{e}}$ est horizontale. Son équation est donnée par : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Sachant que $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=0$ et que $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}^2\left(-1+\ln(\sqrt{\mathrm{e}})\right)=\mathrm{e}\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$. L'équation de cette tangente horizontale est donc : $y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$.

Réponse d

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.

Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 5 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$: $X\sim\mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$

Ainsi $p(X=2)=\binom{5}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^{5-2}=0,3456\approx 0,346$.

Réponse b

5. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$: $X \sim \mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$.

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 \approx 0{,}922$.

Réponse d

6. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$: $X \sim \mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$.

L'espérance d'une loi binomiale est égale à : $E(X) = np$.

Ici, $E(x) = 5 \times \dfrac{2}{5} = 2$.

Réponse c

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.