Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Centre étrangers 12 mai 2022

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle**

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$. **Réponse c**

2. La courbe représentative donnée est celle de f''. Avec la précision permise par ce graphique, on peut affirmer que f'' est positive sur $[-3\ ;\ -1]$, négative sur $[-1\ ;\ 1]$ et s'annule pour $x = -1$.

Cela signifie donc que f' est croissante sur $[-3\ ;\ -1]$ puis décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$. Donc la fonction f' admet un maximum en $x = -1$. **Réponse d**

3. Les fonctions F proposées sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Dérivons chacune d'entre-elles. $\forall x \in \mathbb{R}$,

a. $F'(x) = -\dfrac{1}{6}\left(3x^2\mathrm{e}^{-x^2} + (x^3+1) \times -2x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-x^2}(3x^2 - 2x^4 - 2x)$
$= -\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-x^2}(-2x^3 + 3x^2 - 2x)$.

b. $F'(x) = -\dfrac{1}{4}\left(4x^3 \times \mathrm{e}^{-x^2} + x^4 \times (-2x\mathrm{e}^{-x^2})\right) = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^2}\left(4x^3 - 2x^5\right)$.

c. $F'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(2x \times \mathrm{e}^{-x^2} + (x^2+1) \times -2x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}(2x - 2x^3 - 2x) = -\dfrac{1}{2} \times \left(-2x^3\mathrm{e}^{-x^2}\right) =$
$x^3\mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$.

d. $F'(x) = (6x - 8x^3) \times \mathrm{e}^{-x^2} + (3x^2 - 2x^4) \times -2x\mathrm{e}^{-x^2} = (4x^5 - 14x^3 + 6x)\mathrm{e}^{-x^2}$

Réponse c

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. **Réponse b**

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives notées F. De plus $f(x)$ est de la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x+1$. En remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x+1}$, on peut alors écrire que pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Sachant que $F(0) = 1$ alors

$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^1 + k = 1 \iff k = 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1} + 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}$. **Réponse c**

6. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 1]$, convexe sur $[1\ ;\ 4]$ et $f''(1) = 0$ (point d'inflexion). f''est donc négative sur $[-2\ ;\ 1]$, positive sur $[1\ ;\ 4]$ s'annulant en 1. **Réponse a**

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : fonctions logarithme et suites.**

1. • On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. En utilisant le formule de la dérivée d'un produit, $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} = \ln(x)+1$

b. $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x)+1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
Dans le tableau : $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1})+1 = -\mathrm{e}^{-1}+1 = 1-\mathrm{e}^{-1} > 0$

x	0		e^{-1}		1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		
$f(x)$	‖ 1	↘	$1-\mathrm{e}^{-1}\approx 0{,}632$	↗	1	$+\infty$

c. $f(1) = 1$. D'après les variations de la fonction f,

- $\forall x \in]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1[$;
- $\forall x \in [\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$.

Donc $\forall x \in]0\,;\,1]$, $f(x) \in \left[1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1\right]$. Or $1-\mathrm{e}^{-1} > 0$ donc $f(x) \in]\,0\,;\,1]$ pour tout réel x dans $]0\,;\,1]$.

3. **a.** L'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y = f'(1)(x-1)+f(1)$
Avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, on en déduit l'équation de (T) : $y = x-1+1 = x$, soit
$M(x\,;\,y) \in (T) \iff y = x$.

b. Nous savons que $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \ln(x)+1$.
La fonction f' est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, donc f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (T). Donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant x$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0\,;\,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n.
Initialisation : on a $u_0 \in]0\,;\,1[$, soit $0 < u_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 < u_n < 1$.
On a vu à la question **2. b.** que si $0 < x < 1$, alors $0 < f(x) < 1$.
Donc si $0 < u_n < 1$, alors $0 < f(u_n) < 1$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b. D'après la question **3.c**, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.
De plus pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l.

EXERCICE 3 (7 points) **Thème : géométrie dans espace.**

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Avec $A(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$, $C(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$ et $D(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$, on obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

Pour que les points A, B, C et D soient coplanaires, il faut que (par exemple) le vecteur $\overrightarrow{AD}$ soit une combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Existe-t-il un couple de réels $(a\ ;\ b)$ tel que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}$? Cette égalité vectorielle se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 3a+3b &= -3 \\ 3a &= 6 \\ 3a-3b &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b &= -1 \\ a &= 2 \\ a-b &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3 \\ a &= 2 \\ -b &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3 \\ a &= 2 \\ b &= 3 \end{cases}$$

C'est impossible. Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2. Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 3+3\times 0+3\times(-3) = 9-9 = 0$. Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le triangle ABC est rectangle est rectangle en A.

3. Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = (-3)\times 3+6\times 3+(-3)\times 3 = -9+18-9 = 0$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = (-3)\times 3+6\times 0+(-3)\times(-3) = -9+9 = 0$

Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est aussi orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc orthogonal à tout vecteur du plan (ABC).

4. Les questions précédentes permettent d'affirmer que le point A est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times AD$.

$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\times AB\times AC = \dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2} = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$

Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6} = 27$ unités de volume.

5. Soit $H(5\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

a. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont :

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

Existe-t-il un couple de réels $(\alpha\ ;\ \beta)$ tel que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$? Cette égalité vectorielle permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} -6\beta &= -1 \\ -3\alpha+3\beta &= -1 \\ -6\alpha-6\beta &= -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \dfrac{1}{6} \\ -3\alpha &= -1-\dfrac{3}{6} \\ -6\alpha &= -4+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \dfrac{1}{6} \\ -3\alpha &= -\dfrac{3}{2} \\ 6\alpha &= 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{6} \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}. \quad \text{Donc } \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}.$$

b. D'après la question précédente, le vecteur $\overrightarrow{BH}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires dur plan (BCD). On peut donc affirmer que le point H appartient au plan (BCD). Montrons maintenant que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan (BCD), c'est-a-dire que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à une base du plan (BCD), c'est-a-dire orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 2\times 0 + 2\times(-3) + (-1)\times(-6) = -6+6 = 0$
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DB} = 2\times(-6) + 2\times 3 + (-1)\times(-6) = -12+6+6 = 0$
Donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, donc à toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs, donc à tout vecteur du plan (BCD). Donc H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

c. La distance du point A au plan (BCD) est égale à $\|\overrightarrow{AH}\|$:
$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$ unités de longueur.

6. $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times \mathcal{A}_{BCD}\times AH$ d'où $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3\times\mathcal{V}_{ABCD}}{AH}$.

Donc $\mathcal{A}_{AHC} = \dfrac{3\times 27}{3} = 27$ unités d'aire.

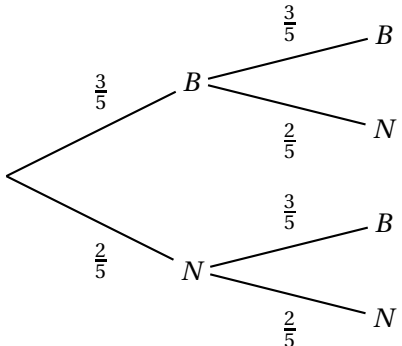
EXERCICE 4 (7 points) **Thème : probabilités.**

1. On note par

- B l'évènement : « on tire un jeton de couleur blanche » ;
- N l'évènement : « on tire un jeton de couleur noire ».

Ainsi, $p(B) = \dfrac{3}{5}$ et $p(N) = \dfrac{2}{5}$

a. L'arbre complété :



b. Pour perdre 9 euros, il faut avoir tiré deux jetons blancs.
Sachant qu'il s'agit de deux tirages successifs avec remise, et en notant X la variable aléatoire donnant le gain du joueur, on a : $p(X=-9) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

2. **a.** On considère à présent qu'il y a 3 jetons blancs et N jetons noirs, pour un total de $N+3$ jetons. On effectue toujours deux tirages avec remise d'un jeton. On note par X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donc $X \in \{-9\ ;\ -1\ ;\ 5\}$

- Pour perdre 9 euros, il faut tirer deux jetons blancs : $P(X=-9) = \left(\dfrac{3}{N+3}\right)^2 = \dfrac{9}{(N+3)^2}$
- Pour perdre un euro il faut tirer deux jetons noirs : $P(X=-1) = \left(\dfrac{N}{N+3}\right)^2 = \dfrac{N^2}{(N+3)^2}$
- pour gagner cinq euros, il faut tirer un jeton de chaque couleur (B + N ou N + B) : $P(X=5) = 2 \times \dfrac{3}{N+3} \times \dfrac{N}{N+3} = \dfrac{6N}{(N+3)^2}$

La loi de probabilités est donc :

$X = x_i$	-9	-1	5
$P(X=x_i)$	$\dfrac{9}{(N+3)^2}$	$\dfrac{N^2}{(N+3)^2}$	$\dfrac{6N}{(N+3)^2}$

b. $-x^2+30x-81>0 \iff x^2-30x+81<0$. Les racines du trinôme $x^2-30x+81$ sont $x=3$ et $x=27$. Donc en utilisant les signes du trinôme du second degré, $-x^2+30x-81>0 \iff x \in]3\ ;\ 27[$.

c. Calculons l'espérance de cette loi de probabilité :

$E(X) = (-9) \times \dfrac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \dfrac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \dfrac{6N}{(N+3)^2} = \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$.

Le jeu est favorable au joueur si et seulement si $E(X)>0$.

$E(X)>0 \iff -N^2+30N-81>0 \iff N \in]3\ ;\ 27[$ donc $4 \leqslant N \leqslant 26$ ($N \in [\![4\ ;\ 26]\!]$) : il faut donc entre 4 et 26 jetons noirs (4 et 26 compris) pour que le jeu soit favorable au joueur.

d. Le gain moyen (ou l'espérance) est maximal lorsque la fonction $f\ :\ N \mapsto \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$ est maximale, c'est-a-dire lorsque $f'(N)=0$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Pour $N \in [0\ ;\ +\infty[$:

$f'(N) = \dfrac{(-2N+30) \times (N+3)^2 - 2(N+3) \times (-N^2+30N-81)}{\left((N+3)^2\right)^2} =$

$\dfrac{(-2N+30)(N+3) - 2(-N^2+30N-81)}{(N+3)^3} = \dfrac{-2N^2-6N+30N+90+2N^2-60N+162}{(N+3)^3} =$

$\dfrac{-36N+252}{(N+3)^3} = \dfrac{-36(N-7)}{(N+3)^3}$

$f'(N)=0 \iff N=7$.

Le gain moyen du joueur est maximal lorsque dans l'urne il y a 7 jetons noirs et 3 jetons blancs.

3. Dans l'urne il y a 7 jetons noirs ($N=7$) et 3 jetons blancs, pour un total de 10 jetons. La probabilité de gagner 5 euros est égale à $p = \dfrac{6 \times 7}{10^2} = \dfrac{21}{50} = 0,42$.

On répète ce jeu pour 10 personnes. On note par Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes gagnant 5 euros. Ainsi $Y \in [\![0\ ;\ 10]\!]$. Y suit une loi binomiale (expérience de Bernoulli n'ayant que deux issues et se répétant indépendamment et à l'identique n fois) de paramètres $n=10$ et $p = \dfrac{21}{50}$: $Y \sim \mathscr{B}\left(10\ ;\ \dfrac{21}{50}\right)$

$P(Y \geqslant 0) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\dfrac{29}{50}\right)^{10} \approx 0,996$

Donc la probabilité d'avoir au moins un gagnant à 5 euros est d'environ 0,996. C'est donc un évènement (presque) certain.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.