Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Jour 2

Code sujet **23-MATJ2LI1** 4 heures

Proposition de corrigé pédagogique • FormaV

Se repérer dans le corrigé

Exercice 1 — Étude de la fonction f(x) = 1/(1 + e^{-3x}), tangente et convexité
12 réponses • sujet p. 2–3

Exercice 2 — Étude de f(x) = x − ln(1 + x) et d’une suite définie par récurrence
11 réponses • sujet p. 3–3

Exercice 3 — Géométrie dans l’espace : plan, droite orthogonale, disque et cône
8 réponses • sujet p. 4–4

Exercice 4 — QCM de probabilités sur la production de pièces mécaniques défectueuses
20 réponses • sujet p. 4–5

Les numéros, parties et pages renvoient au sujet original. Chaque réponse rappelle la consigne, explique la démarche et donne le résultat.

Exercice 1

5 points

Étude de la fonction f(x) = 1/(1 + e^{-3x}), tangente et convexité

Partie A : lectures graphiques

Question 1.

Sujet p. 2

> Par lecture graphique, déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$f. Aucune justification n'est demandée.

Sur le graphique, la tangente passe par A$(0;\frac{1}{2})$ et par B$(1;\frac{5}{4})$. Son coefficient directeur est donc $\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}{1-0}=\frac{3}{4}$, et son ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2}$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Par lecture graphique, l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

Question 2.

Sujet p. 2

> Par lecture graphique, donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Aucune justification n'est demandée.

La lecture graphique montre que la courbe change de forme au point A, d'abscisse 0 : elle est tournée vers le haut à gauche de A et vers le bas à droite.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction semble convexe sur $]-\infty;0[$ et concave sur $]0;+\infty[$. Le changement de convexité se produit en $x=0$.

Partie B : étude de la fonction

Question 1.

Sujet p. 2

> On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f′.

On écrit $f(x)=(1+e^{-3x})^{-1}$. Par dérivation d'une composée, avec $(e^{-3x})'=-3e^{-3x}$, on obtient :

$$f'(x)=-(1+e^{-3x})^{-2}(-3e^{-3x})=\frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}.$$

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$.

Question 2.

Sujet p. 2

> Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $e^{-3x} > 0$. Le numérateur de $f'(x)$ est donc strictement positif, et son dénominateur, qui est un carré non nul, est strictement positif. Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. Une fonction dérivable dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle y est strictement croissante.

RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 3.a.

Sujet p. 2

> Déterminer la limite en +∞ de la fonction f.

Lorsque $x \to +\infty$, $e^{-3x} \to 0$. Par conséquent, $f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}} \to \frac{1}{1+0} = 1$.

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Question 3.b.

Sujet p. 2

> Déterminer la limite en −∞ de la fonction f.

Lorsque $x \to -\infty$, $-3x \to +\infty$, donc $e^{-3x} \to +\infty$. Ainsi, le dénominateur $1 + e^{-3x}$ tend vers $+\infty$, et $f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}} \to 0$.

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Question 4.

Sujet p. 2

> Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation f(x) = 0,99.

On résout l'équation en isolant l'exponentielle :

$$\frac{1}{1+e^{-3x}} = 0{,}99 = \frac{99}{100} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + e^{-3x} = \frac{100}{99} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-3x} = \frac{1}{99}.$$

En prenant le logarithme népérien, $-3x = -\ln(99)$, donc $x = \frac{\ln(99)}{3}$. Cette solution est unique car f est strictement croissante.

RÉPONSE À RETENIR

La valeur exacte est $\alpha = \dfrac{\ln(99)}{3}$.

Partie C : Tangente et convexité

Question 1.

Sujet p. 2, 3

> Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$. Or

$$f(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f'(0) = \frac{3}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient l'équation demandée.

RÉPONSE À RETENIR

$\mathcal{T}$ a pour équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

Question 2.

Sujet p. 3

> On admet que f″ est définie sur $\mathbb{R}$ par f″(x) = 9e^{-3x}(e^{-3x} − 1)/(1 + e^{-3x})^3. Étudier le signe de la fonction f″ sur $\mathbb{R}$.

Dans l'expression donnée, $9e^{-3x}$ et $(1 + e^{-3x})^3$ sont strictement positifs pour tout réel x. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $e^{-3x} - 1$. Ainsi, $e^{-3x} - 1 > 0$ si $x < 0$, $e^{-3x} - 1 = 0$ si $x = 0$, et $e^{-3x} - 1 < 0$ si $x > 0$.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;+\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

RÉPONSE À RETENIR

$f''(x) > 0$ sur $]-\infty;0[$, $f''(0) = 0$, et $f''(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$.

Question 3.a.

Sujet p. 3

> Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

Une fonction deux fois dérivable est convexe sur un intervalle où sa dérivée seconde est positive ou nulle. D'après l'étude précédente, $f''(x) > 0$ pour $x < 0$ et $f''(0) = 0$. Elle est donc convexe sur $]-\infty;0]$.

RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$.

Question 3.b.

Sujet p. 2, 3

> Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$f ? Le point A a pour coordonnées (0 ; 1/2).

On a $f(0) = \frac{1}{2}$, donc A$(0;\frac{1}{2})$ appartient à $\mathcal{C}_f$. De plus, f'' change de signe en 0 : la courbe passe de la convexité à la concavité en ce point.

RÉPONSE À RETENIR

A est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Question 4.

Sujet p. 3

> En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}$f. Justifier la réponse.

Sur $]-\infty;0]$, la fonction est convexe : sa courbe est au-dessus de sa tangente en A sur cet intervalle. Sur $[0;+\infty[$, elle est concave : sa courbe est au-dessous de sa tangente en A. La courbe et la tangente se rencontrent en A.

RÉPONSE À RETENIR

Pour $x<0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$. Pour $x>0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{T}$. Elles se touchent en A$(0;\frac{1}{2})$.

Exercice 2

5 points

Étude de f(x) = x − ln(1 + x) et d'une suite définie par récurrence

Partie A

Question 1.

Sujet p. 3

> On considère la fonction f définie par f(x) = x − ln(1 + x). Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle]−1 ; +∞[.

La fonction affine x est définie sur $\mathbb{R}$. Pour que $\ln(1+x)$ existe, il faut que son argument soit strictement positif : $1+x>0$, soit $x>-1$. La fonction f est donc définie exactement lorsque $x\in]-1;+\infty[$.

RÉPONSE À RETENIR

Le domaine de définition de f est $]-1;+\infty[$.

Question 2.

Sujet p. 3

> On admet que la fonction f est dérivable sur]−1 ; +∞[. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f′.

Sur $]-1;+\infty[$, on dérive terme à terme. La dérivée de $\ln(1+x)$ est $\frac{1}{1+x}$, donc

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}.$$

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x>-1$, $f'(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

Question 3.a.

Sujet p. 3

> En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle]−1 ; +∞[.

Sur le domaine de f, le dénominateur $1+x$ de $f'(x)=\frac{x}{1+x}$ est strictement positif. Le signe de f' est donc celui de x : $f'(x)<0$ si $-1<x<0$, $f'(0)=0$, et $f'(x)>0$ si $x>0$. Ainsi, f décroît jusqu'à 0, puis croît à partir de 0.

RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est strictement décroissante sur $]-1;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Question 3.b.

Sujet p. 3

> En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle]−1 ; +∞[.

D'après les variations précédentes, f atteint son minimum en $x=0$. Or $f(0)=0-\ln(1)=0$. La fonction est donc positive ou nulle sur son domaine, et elle ne s'annule qu'en 0.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x\in]-1;+\infty[$, $f(x)\geq 0$, avec égalité uniquement pour $x=0$.

Question 4.a.

Sujet p. 3

> Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle]−1 ; +∞[, on a f(x) = ln(e^x/(1 + x)).

Pour $x > -1$, on a $1 + x > 0$, et $e^x > 0$, donc le logarithme du quotient est défini. En utilisant les propriétés du logarithme,

$$\ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right) = \ln(e^x) - \ln(1+x) = x - \ln(1+x) = f(x).$$

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right)$.

Question 4.b.

Sujet p. 3

> En déduire la limite en +∞ de la fonction f.

Lorsque $x \to +\infty$, $\frac{e^x}{1+x} \to +\infty$, car l'exponentielle croît plus vite que la fonction affine. La fonction logarithme tend elle aussi vers $+\infty$ lorsque son argument tend vers $+\infty$. D'après l'égalité établie à la question précédente, il en résulte la limite de f.

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

Question 1.

Sujet p. 3

> On considère la suite (uₙ) définie par u₀ = 10 et, pour tout entier naturel n, uₙ₊₁ = uₙ − ln(1 + uₙ). On admet que la suite (uₙ) est bien définie. Donner la valeur arrondie au millième de u₁.

La relation de récurrence donne $u_1 = u_0 - \ln(1+u_0) = 10 - \ln(11)$. Ainsi, $u_1 \approx 7{,}6021047$.

RÉPONSE À RETENIR

Arrondie au millième, $\boxed{u_1 \approx 7{,}602}$.

Question 2.

Sujet p. 3

> En utilisant la question 3.a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a uₙ ≥ 0.

On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : $u_0 = 10 \geq 0$.

Hérédité : supposons que $u_n \geq 0$. La question 3.a de la partie A montre que f est croissante sur $[0;+\infty[$, et $f(0) = 0$. Par conséquent, $f(u_n) \geq f(0) = 0$. Or la relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $u_{n+1} \geq 0$.

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n \geq 0}$.

Question 3.

Sujet p. 3

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On sait que $u_n \geq 0$, donc $1 + u_n \geq 1$ et $\ln(1 + u_n) \geq 0$. La relation de récurrence donne alors

$$u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n) \leq 0.$$

Ainsi, la suite est décroissante. Elle est même strictement décroissante : $u_0 > 0$, et, si $u_n > 0$, le résultat de la question 3.b de la partie A donne $u_{n+1} = f(u_n) > 0$. Par récurrence, tous les termes sont strictement positifs ; ainsi $\ln(1 + u_n) > 0$ et $u_{n+1} < u_n$.

RÉPONSE À RETENIR

La suite (u_n) est décroissante, et même strictement décroissante.

Question 4.

Sujet p. 3

Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est décroissante d'après la question 3 et minorée par 0 d'après la question 2. Le théorème de convergence des suites monotones s'applique : une suite décroissante et minorée converge.

RÉPONSE À RETENIR

La suite (u_n) converge.

Question 5.

Sujet p. 3

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Notons L la limite de la suite, dont l'existence a été établie à la question précédente. Comme $u_n \geq 0$, on a $L \geq 0$. La fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est continue en L, donc on peut passer à la limite dans la relation de récurrence :

$$L = L - \ln(1 + L).$$

Il vient $\ln(1 + L) = 0$, donc $1 + L = 1$ et $L = 0$.

RÉPONSE À RETENIR

La limite de la suite est $\boxed{0}$.

Exercice 3

5 points

Géométrie dans l'espace : plan, droite orthogonale, disque et cône

Question 1.

Sujet p. 4

> Dans le repère orthonormé donné, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(2 ; 1 ; 2) et C(−2 ; −5 ; 1). Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Calculons deux vecteurs issus de A :

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2-3\,;\,1-0\,;\,2-1) = (-1\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2-3\,;\,-5-0\,;\,1-1) = (-5\,;\,-5\,;\,0)$.

Ces vecteurs ne sont pas proportionnels : si $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, leur troisième coordonnée imposerait $1 = \lambda \times 0$, ce qui est impossible. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

RÉPONSE À RETENIR

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Question 2.

Sujet p. 4

> Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Avec les coordonnées calculées à la question 1 :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1)(-5) + (1)(-5) + (1)(0) = 5 - 5 = 0$.

Le produit scalaire est nul, donc ces deux vecteurs sont orthogonaux.

RÉPONSE À RETENIR

Le triangle ABC est rectangle en A.

Question 3.

Sujet p. 4

> Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne −x + y − 2z + 5 = 0.

Vérifions que les coordonnées de chacun des trois points satisfont l'équation proposée :

- Pour A(3 ; 0 ; 1) : $-3 + 0 - 2 \times 1 + 5 = 0$.
- Pour B(2 ; 1 ; 2) : $-2 + 1 - 2 \times 2 + 5 = 0$.
- Pour C(−2 ; −5 ; 1) : $-(-2) - 5 - 2 \times 1 + 5 = 0$.

L'équation définit un plan, dont un vecteur normal est $(-1\,;\,1\,;\,-2)$, non nul. Ce plan contient A, B et C ; comme ces points ne sont pas alignés d'après la question 1, il s'agit bien du plan (ABC).

RÉPONSE À RETENIR

Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $-x + y - 2z + 5 = 0$.

Question 4.

Sujet p. 4

> On considère le point S(1 ; −2 ; 4). Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).

Un vecteur normal au plan (ABC), d'après son équation, est $\vec{n} = (-1\,;\,1\,;\,-2)$. Une droite orthogonale à ce plan a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan. Comme la droite cherchée passe par $S(1\,;\,-2\,;\,4)$, une représentation paramétrique est :

$(x\,;\,y\,;\,z) = (1\,;\,-2\,;\,4) + t(-1\,;\,1\,;\,-2), \quad t \in \mathbb{R}$.

En coordonnées, cela donne $x = 1 - t$, $y = -2 + t$ et $z = 4 - 2t$.

RÉPONSE À RETENIR

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Question 5.

Sujet p. 4

> On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC). Montrer que les coordonnées de H sont (0 ; −1 ; 2).

Pour déterminer l'intersection de Δ avec le plan, on remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan :

$-(1 - t) + (-2 + t) - 2(4 - 2t) + 5 = 0$, soit $6t - 6 = 0$. Ainsi, $t = 1$.

En reportant cette valeur dans la représentation paramétrique, on obtient $x = 0$, $y = -1$ et $z = 2$.

RÉPONSE À RETENIR

Le point d'intersection est $H(0\,;\,-1\,;\,2)$.

Question 6.

Sujet p. 4

> Calculer la valeur exacte de la distance SH.

Le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{SH} = H - S = (0 - 1\,;\,-1 - (-2)\,;\,2 - 4) = (-1\,;\,1\,;\,-2)$.

Dans le repère orthonormé, la distance SH est la norme de ce vecteur :

$SH = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$.

RÉPONSE À RETENIR

La valeur exacte de la distance SH est $\sqrt{6}$.

Question 7.

Sujet p. 4

> On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$. Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$.

Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est HB. Avec $H(0\,;\,-1\,;\,2)$ et $B(2\,;\,1\,;\,2)$, on calcule :

$HB = \sqrt{(2-0)^2 + (1-(-1))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

L'aire du disque de rayon $2\sqrt{2}$ vaut donc $\pi(2\sqrt{2})^2 = 8\pi$.

RÉPONSE À RETENIR

L'aire exacte du disque $\mathcal{D}$ est 8π.

Question 8.

Sujet p. 4

En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathscr{D}$.

La base du cône est le disque $\mathcal{D}$, inclus dans le plan (ABC). La droite (SH) est orthogonale à ce plan : la hauteur du cône est donc $SH = \sqrt{6}$. L'aire de la base vaut 8π, d'après la question 7. Avec la formule du volume d'un cône, $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$, on obtient :

$V = \frac{1}{3} \times 8\pi \times \sqrt{6} = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$.

RÉPONSE À RETENIR

Le volume exact du cône est $\dfrac{8\pi\sqrt{6}}{3}$.

Exercice 4

5 points

QCM de probabilités sur la production de pièces mécaniques défectueuses

Question 1.a.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ? Proposition a : 1.

La probabilité qu'une pièce ne soit pas défectueuse est $1 - 0{,}04 = 0{,}96$. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, la probabilité qu'aucune des 50 pièces ne soit défectueuse est $0{,}96^{50}$. Par complément, la probabilité d'en tirer au moins une est $1 - 0{,}96^{50} \approx 0{,}870114$, soit $0{,}870$ au millième.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition a, 1, est fausse. La réponse exacte est la proposition b : $0{,}870$.

Question 1.b.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ? Proposition b : 0,870.

La probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse en 50 tirages est $0{,}96^{50}$. L'événement « tirer au moins une pièce défectueuse » est son contraire : sa probabilité vaut donc $1 - 0{,}96^{50} \approx 0{,}870114$, soit $0{,}870$ au millième.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition b, $0{,}870$, est exacte.

Question 1.c.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ? Proposition c : 0,600.

Par complément, la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse parmi 50 est $1 - 0{,}96^{50} \approx 0{,}870114$, soit $0{,}870$ au millième.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition c, $0{,}600$, est fausse. La bonne réponse est b : $0{,}870$.

Question 1.d.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ? Proposition d : 0,599.

L'événement « au moins une pièce défectueuse » est le contraire de « aucune pièce défectueuse ». Sa probabilité vaut $1 - 0{,}96^{50} \approx 0{,}870114$, soit $0{,}870$ au millième.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition d, $0{,}599$, est fausse. La bonne réponse est b : $0{,}870$.

Question 2.a.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. La probabilité p(3 < X ≤ 7) est égale à quelle expression ? Proposition a : p(X ≤ 7) − p(X > 3).

Comme X est un nombre entier, l'événement $3 < X \leq 7$ correspond aux valeurs $4, 5, 6, 7$. On l'obtient en retirant de l'événement $X \leq 7$ les cas $X \leq 3$, d'où $P(3 < X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$. La proposition a soustrait $P(X > 3)$, ce qui ne convient pas.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition a est fausse. La bonne expression est celle de la proposition b.

Question 2.b.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. La probabilité p(3 < X ≤ 7) est égale à quelle expression ? Proposition b : p(X ≤ 7) − p(X ≤ 3).

Les valeurs entières de X qui vérifient $3 < X \leq 7$ sont $4, 5, 6, 7$. La différence entre les événements emboîtés $X \leq 7$ et $X \leq 3$ conserve précisément ces valeurs : $P(3 < X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition b est exacte.

Question 2.c.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. La probabilité p(3 < X ≤ 7) est égale à quelle expression ? Proposition c : p(X < 7) − p(X > 3).

La probabilité recherchée est $P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$. Or $P(X < 7) = P(X \leq 6)$, tandis que $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$: la différence proposée en c ne correspond donc pas à l'événement recherché.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition c est fausse. La bonne réponse est b : $P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$.

Question 2.d.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. La probabilité p(3 < X ≤ 7) est égale à quelle expression ? Proposition d : p(X < 7) − p(X ≥ 3).

Pour conserver exactement les valeurs $4, 5, 6, 7$, il faut calculer $P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$. Dans la proposition d, $P(X < 7) = P(X \leq 6)$, et l'on soustrait $P(X \geq 3)$: cette expression ne convient pas.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition d est fausse. La bonne réponse est b.

Question 3.a.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ? Proposition a : 2.

Le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(50; 0{,}04)$. La somme des probabilités de $X = 0, 1, 2$ donne $P(X \leq 2) = \sum_{j=0}^{2} \binom{50}{j} (0{,}04)^j (0{,}96)^{50-j} \approx 0{,}677$, ce qui est inférieur à $0{,}95$. Le plus petit entier convenable est donc supérieur à 2.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition a, $k = 2$, est fausse. Le plus petit entier convenable est $k = 4$, proposition c.

Question 3.b.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ? Proposition b : 3.

Pour $X \sim \mathcal{B}(50; 0{,}04)$, on calcule $P(X \leq 3) = \sum_{j=0}^{3} \binom{50}{j} (0{,}04)^j (0{,}96)^{50-j} \approx 0{,}861$. Cette probabilité est inférieure à $0{,}95$, donc $k = 3$ ne suffit pas.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition b, $k = 3$, est fausse. Le plus petit entier recherché est $k = 4$, proposition c.

Question 3.c.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ? Proposition c : 4.

Avec $X \sim \mathcal{B}(50; 0{,}04)$, les sommes binomiales donnent $P(X \leq 3) \approx 0{,}860862 < 0{,}95$ et $P(X \leq 4) \approx 0{,}951020 \geq 0{,}95$. Ainsi, 4 atteint le seuil, tandis que l'entier précédent ne l'atteint pas.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition c, $k = 4$, est exacte.

Question 3.d.

Sujet p. 4, 5

Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. On tire au hasard n = 50 pièces, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, et X désigne le nombre de pièces défectueuses tirées. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

> Proposition d : 5.

Le seuil de $95\,\%$ est déjà atteint pour $k = 4$, car $P(X \leq 4) \approx 0{,}951020$. En revanche, $P(X \leq 3) \approx 0{,}860862 < 0{,}95$. Le plus petit entier recherché est donc 4, et non 5.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition d, $k = 5$, est fausse. La bonne réponse est c : $k = 4$.

Question 4.a.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. Dans cette question, n ne vaut plus nécessairement 50. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ? Proposition a : 0,04ⁿ.

La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $0{,}04$. Par indépendance des tirages assimilés à des tirages avec remise, la probabilité que les n pièces soient toutes défectueuses est le produit de n facteurs égaux à $0{,}04$, soit $(0{,}04)^n$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition a, $0{,}04^n$, est exacte.

Question 4.b.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. Dans cette question, n ne vaut plus nécessairement 50. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ? Proposition b : 0,96ⁿ.

La probabilité $0{,}96^n$ correspond à l'événement « aucune pièce défectueuse ». Pour que les n pièces soient toutes défectueuses, la probabilité est $(0{,}04)^n$, par indépendance des tirages.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition b, $0{,}96^n$, est fausse. La bonne réponse est a : $0{,}04^n$.

Question 4.c.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. Dans cette question, n ne vaut plus nécessairement 50. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ? Proposition c : 1 − 0,04ⁿ.

La probabilité que toutes les pièces soient défectueuses est $(0{,}04)^n$. La quantité $1 - (0{,}04)^n$ est la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire que toutes les pièces ne soient pas défectueuses.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition c est fausse. La bonne réponse est a : $0{,}04^n$.

Question 4.d.

Sujet p. 4, 5

> Une chaîne produit des pièces mécaniques dont 4 % sont défectueuses. Dans cette question, n ne vaut plus nécessairement 50. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ? Proposition d : 1 − 0,96ⁿ.

La probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse est $0{,}96^n$, donc $1 - 0{,}96^n$ est la probabilité d'en tirer au moins une. Ce n'est pas la probabilité que toutes les pièces soient défectueuses, qui vaut $(0{,}04)^n$.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition d est fausse. La bonne réponse est a : $0{,}04^n$.

Question 5.a.

Sujet p. 4, 5

> On considère la fonction Python def seuil(x): n = 1; while 1-0.96**n < x: n = n + 1; return n. Que renvoie-t-elle ? Proposition a : le plus petit nombre n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

Pour n tirages, la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse est $0{,}96^n$. Ainsi, $1 - 0{,}96^n$ est la probabilité d'en tirer au moins une. La boucle incrémente n tant que cette probabilité est strictement inférieure à x, puis renvoie le premier entier testé qui atteint ou dépasse x. Pour un seuil usuel $0 < x < 1$, la boucle termine et cet entier est bien le plus petit nombre de tirages qui atteint le seuil.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition a décrit la fonction : elle renvoie le plus petit nombre n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x, pour $0 < x < 1$.

Question 5.b.

Sujet p. 4, 5

> On considère la fonction Python def seuil(x): n = 1; while 1-0.96**n < x: n = n + 1; return n. Que renvoie-t-elle ? Proposition b : le plus petit nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

La probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse est $0{,}96^n$. Le programme compare au contraire $1 - 0{,}96^n$, qui est la probabilité d'en tirer au moins une. Il ne cherche donc pas le seuil de la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition b est fausse. Pour un seuil usuel $0 < x < 1$, la fonction renvoie le plus petit n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x : proposition a.

Question 5.c.

Sujet p. 4, 5

> On considère la fonction Python def seuil(x): n = 1; while 1-0.96**n < x: n = n + 1; return n. Que renvoie-t-elle ? Proposition c : le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x.

La probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses est $(0{,}04)^n$. Le programme compare plutôt $1 - 0{,}96^n$, la probabilité d'obtenir au moins une pièce défectueuse, et incrémente n jusqu'à atteindre le seuil x. Il ne recherche donc pas le plus grand entier associé à l'événement de la proposition c.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition c est fausse. Pour un seuil usuel $0 < x < 1$, la réponse correspondant au programme est a.

Question 5.d.

> On considère la fonction Python def seuil(x): n = 1; while 1-0.96**n < x: n = n + 1; return n. Que renvoie-t-elle ? Proposition d : le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

La probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse vaut $0{,}96^n$, tandis que $1 - 0{,}96^n$ est la probabilité d'en tirer au moins une. De plus, le programme incrémente n jusqu'à ce que cette dernière probabilité atteigne x : il ne recherche pas le plus grand entier correspondant à l'événement « aucune pièce défectueuse ».

RÉPONSE À RETENIR

La proposition d est fausse. Pour un seuil usuel $0 < x < 1$, la fonction renvoie le plus petit nombre de tirages pour lequel la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse est supérieure ou égale à x : proposition a.

Sujet : https://www.sujetdebac.fr/annales-pdf/2023/spe-mathematiques-2023-liban-2-sujet-officiel.pdf
© FormaV EI • Proposition de correction, distincte d'un corrigé officiel.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.