Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2023 • Métropole • Jour 1 • Remplacement

Code sujet **23 – MATJ1ME3** 4 heures

Proposition de corrigé pédagogique • FormaV

Se repérer dans le corrigé

Exercice 1 — QCM sur les primitives et les suites
16 réponses • sujet p. 2–2

Exercice 2 — Géométrie dans l’espace : plan, orthogonalité et distances
8 réponses • sujet p. 2–3

Exercice 3 — Test de dépistage des allergies et loi binomiale
7 réponses • sujet p. 3–4

Exercice 4 — Étude de fonctions : signe, convexité et variations
12 réponses • sujet p. 4–4

Les numéros, parties et pages renvoient au sujet original. Chaque réponse rappelle la consigne, explique la démarche et donne le résultat.

Exercice 1

4 points

QCM sur les primitives et les suites

Question 1.a

Sujet p. 2

> On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x)=x e^(x²−3). Une des primitives F de f sur ℝ est définie par l'option a : F(x)=2x e^(x²−3). Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

On dérive l'expression proposée par la règle du produit et la dérivation de l'exponentielle composée : **$F'(x) = 2e^{x^2-3} + 4x^2e^{x^2-3} = (2 + 4x^2)e^{x^2-3}$**. Cette dérivée n'est pas égale à $f(x) = xe^{x^2-3}$.

RÉPONSE À RETENIR

L'option a n'est pas une primitive. La bonne réponse à la question 1 est **d**.

Question 1.b

Sujet p. 2

> On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x)=x e^(x²−3). Une des primitives F de f sur ℝ est définie par l'option b : F(x)=(2x²+1)e^(x²−3). Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

Par dérivation d'un produit, l'expression proposée donne **$F'(x) = 4xe^{x^2-3} + (2x^2 + 1)\cdot 2xe^{x^2-3} = (4x^3 + 6x)e^{x^2-3}$**. Ce n'est pas $f(x) = xe^{x^2-3}$.

RÉPONSE À RETENIR

L'option b n'est pas une primitive. La bonne réponse à la question 1 est **d**.

Question 1.c

Sujet p. 2

> On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x)=x e^(x²−3). Une des primitives F de f sur ℝ est définie par l'option c : F(x)=½x e^(x²−3). Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

En dérivant par la règle du produit, on obtient **$F'(x) = \tfrac{1}{2}e^{x^2-3} + x^2e^{x^2-3} = (\tfrac{1}{2} + x^2)e^{x^2-3}$**. Cette dérivée n'est pas égale à $f(x) = xe^{x^2-3}$.

RÉPONSE À RETENIR

L'option c n'est pas une primitive. La bonne réponse à la question 1 est **d**.

Question 1.d

Sujet p. 2

> On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x)=x e^(x²−3). Une des primitives F de f sur ℝ est définie par l'option d : F(x)=½e^(x²−3). Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

Pour l'option d, la dérivée de l'exponentielle composée donne **$F'(x) = \tfrac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2-3} = xe^{x^2-3} = f(x)$**. L'expression proposée est donc bien une primitive de f.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse à la question 1 est **d**.

Question 2.a

Sujet p. 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=e^{(2n+1)}$. L'option a affirme que la suite (u_n) est arithmétique de raison 2. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

La différence de deux termes consécutifs vaut $u_{n+1} - u_n = e^{2n+3} - e^{2n+1} = e^{2n+1}(e^2 - 1)$. Elle dépend de n : la suite n'est pas arithmétique de raison 2.

RÉPONSE À RETENIR

L'affirmation a est fausse. La bonne réponse à la question 2 est **c**.

Question 2.b

Sujet p. 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=e^{(2n+1)}$. L'option b affirme que la suite (u_n) est géométrique de raison e. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

Le quotient de deux termes consécutifs est $u_{n+1}/u_n = e^{2n+3}/e^{2n+1} = e^2$. La suite est géométrique de raison e^2, et non de raison e.

RÉPONSE À RETENIR

L'affirmation b est fausse. La bonne réponse à la question 2 est **c**.

Question 2.c

Sujet p. 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=e^{(2n+1)}$. L'option c affirme que la suite (u_n) est géométrique de raison e^2. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

On calcule $u_{n+1}/u_n = e^{2n+3}/e^{2n+1} = e^2$, quotient indépendant de n. La suite est donc géométrique de raison e^2.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse à la question 2 est **c**.

Question 2.d

Sujet p. 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=e^{(2n+1)}$. L'option d affirme que la suite (u_n) converge vers e. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

On peut écrire $u_n = e(e^2)^n$. Comme $e^2 > 1$, la suite tend vers $+\infty$ et ne converge pas vers e.

RÉPONSE À RETENIR

L'affirmation d est fausse. La bonne réponse à la question 2 est **c**.

Question 3.a

Sujet p. 2

> Pour les questions 3 et 4, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$. La fonction Python doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n>10\,000$. À la ligne 4 de la fonction def seuil(): n=0; u=15; while …: n=n+1; u=1.2*u+12; return(n), l'option a propose de compléter par u<=10 000. Indiquer la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

La boucle doit poursuivre les calculs tant que le seuil n'est pas dépassé. La condition u ≤ 10 000 maintient la boucle lorsque le terme courant est inférieur ou égal à 10 000. À chaque passage, on calcule le terme suivant ; elle s'arrête donc au premier terme strictement supérieur au seuil.

RÉPONSE À RETENIR

L'option a convient : **while u <= 10000**.

Question 3.b

Sujet p. 2

> Pour les questions 3 et 4, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$. La fonction Python doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n>10\,000$. À la ligne 4 de la fonction def seuil(): n=0; u=15; while …: n=n+1; u=1.2*u+12; return(n), l'option b propose de compléter par u=10 000. Indiquer la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

La condition u = 10 000 ne teste que l'égalité. Elle ne fait pas poursuivre la boucle pour toutes les valeurs inférieures au seuil et ne permet donc pas de repérer le premier terme strictement supérieur à 10 000.

RÉPONSE À RETENIR

L'option b est incorrecte. La bonne réponse à la question 3 est **a**.

Question 3.c

Sujet p. 2

> Pour les questions 3 et 4, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$. La fonction Python doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n>10\,000$. À la ligne 4 de la fonction def seuil(): n=0; u=15; while …: n=n+1; u=1.2*u+12; return(n), l'option c propose de compléter par u>10 000. Indiquer la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

Avec la condition u > 10 000, la boucle ne commence pas, car la valeur initiale est u = 15. Le programme renverrait alors n = 0, et non le premier rang où le seuil est dépassé.

RÉPONSE À RETENIR

L'option c est incorrecte. La bonne réponse à la question 3 est **a**.

Question 3.d

Sujet p. 2

> Pour les questions 3 et 4, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$. La fonction Python doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n>10\,000$. À la ligne 4 de la fonction def seuil(): n=0; u=15; while …: n=n+1; u=1.2*u+12; return(n), l'option d propose de compléter par n<=10 000. Indiquer

la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

La condition $n \leq 10\,000$ porte sur le rang et non sur le terme u_n. Elle ne détecte donc pas le dépassement du seuil et pourrait faire poursuivre la boucle après celui-ci.

RÉPONSE À RETENIR

L'option d est incorrecte. La bonne réponse à la question 3 est **a**.

Question 4.a

Sujet p. 2

Pour les questions 3 et 4, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$, ainsi que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+60$. L'option a affirme que la suite (v_n) est une suite décroissante. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

On calcule $v_0 = u_0 + 60 = 75$ et $u_1 = 1{,}2 \times 15 + 12 = 30$, donc $v_1 = 90$. Comme $v_1 > v_0$, la suite n'est pas décroissante.

RÉPONSE À RETENIR

L'affirmation a est fausse. La bonne réponse à la question 4 est **b**.

Question 4.b

Sujet p. 2

Pour les questions 3 et 4, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$, ainsi que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+60$. L'option b affirme que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,2. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

À partir de $v_n = u_n + 60$, on obtient $v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1{,}2u_n + 72 = 1{,}2(u_n + 60) = 1{,}2v_n$. La suite est donc géométrique de raison 1,2.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse à la question 4 est **b**.

Question 4.c

Sujet p. 2

Pour les questions 3 et 4, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$, ainsi que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+60$. L'option c affirme que la suite (v_n) est arithmétique de raison 60. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

La relation $v_{n+1} = 1{,}2v_n$ montre que la suite n'est pas arithmétique de raison 60. On peut aussi vérifier que $v_1 - v_0 = 90 - 75 = 15$, et non 60.

RÉPONSE À RETENIR

L'affirmation c est fausse. La bonne réponse à la question 4 est **b**.

Question 4.d

Sujet p. 2

Pour les questions 3 et 4, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=15$ et $u_{n+1}=1{,}2u_n+12$, ainsi que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+60$. L'option d affirme que la suite (v_n) n'est ni géométrique ni arithmétique. Indiquer sur la

> copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

La relation $v_{n+1} = 1{,}2v_n$, avec $v_0 = 75$, établit que la suite est géométrique de raison 1,2. Elle n'est donc pas une suite qui ne serait ni géométrique ni arithmétique.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'affirmation d est fausse. La bonne réponse à la question 4 est **b**.

Exercice 2

5 points

Géométrie dans l'espace : plan, orthogonalité et distances

Question 1.a

Sujet p. 2, 3

> L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). On considère les points A(1;0;−1), B(3;−1;2), C(2;−2;−1) et D(4;−1;−2). Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.

Pour montrer que les points A, B et C définissent un plan, il suffit de vérifier qu'ils ne sont pas alignés. On calcule :

$\overrightarrow{AB} = (3-1\,;\,-1-0\,;\,2-(-1)) = (2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\overrightarrow{AC} = (2-1\,;\,-2-0\,;\,-1-(-1)) = (1\,;\,-2\,;\,0)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : si $\overrightarrow{AB}$ était un multiple de $\overrightarrow{AC}$, sa troisième coordonnée serait nulle, alors qu'elle vaut 3. Ainsi, A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan $\mathcal{P}$.

RÉPONSE À RETENIR

Les points A, B et C ne sont pas alignés ; ils définissent donc le plan $\mathcal{P}$.

Question 1.b

Sujet p. 2, 3

> Avec les points A, B, C et D et le plan $\mathscr{P}$ définis dans l'exercice, montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Sur le plan $\mathscr{P}$, que représente le point C par rapport à D ?

Un vecteur directeur de la droite (CD) est :

$\overrightarrow{CD} = (4-2\,;\,-1-(-2)\,;\,-2-(-1)) = (2\,;\,1\,;\,-1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan $\mathcal{P}$. On calcule :

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 2 + 1\times(-1) + (-1)\times 3 = 0$,

et $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 1 + 1\times(-2) + (-1)\times 0 = 0$.

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, ils engendrent les directions du plan. Le vecteur directeur de (CD) est donc orthogonal au plan $\mathcal{P}$. De plus, C appartient à ce plan.

RÉPONSE À RETENIR

La droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Par conséquent, C est le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$.

Question 1.c

Sujet p. 2, 3

> Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : 2x+y−z−3=0.

Le vecteur $\overrightarrow{CD} = (2\,;\,1\,;\,-1)$ est normal au plan $\mathcal{P}$, comme le montrent les produits scalaires de la question 1.b. Une équation de ce plan est donc de la forme $2x + y - z + d = 0$.

Comme A appartient à $\mathcal{P}$, ses coordonnées vérifient cette équation : $2\times 1 + 0 - (-1) + d = 0$, donc $d = -3$.

On vérifie que B et C vérifient également l'équation : pour B, $2\times 3 - 1 - 2 - 3 = 0$, et pour C, $2\times 2 - 2 - (-1) - 3 = 0$. Cette équation est bien celle du plan contenant A, B et C.

RÉPONSE À RETENIR

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\boxed{2x + y - z - 3 = 0}$.

Question 2.a

Sujet p. 2, 3

Calculer la distance CD.

On a $\overrightarrow{CD} = (2\,;\,1\,;\,-1)$. Dans le repère orthonormé, la distance CD est la norme de ce vecteur :

$CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{CD = \sqrt{6}}$.

Question 2.b

Sujet p. 2, 3

Existe-t-il un point M du plan $\mathscr{P}$, différent de C, vérifiant MD=√6 ? Justifier la réponse.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{CM}$ appartient à ce plan, tandis que $\overrightarrow{CD}$ lui est perpendiculaire. Le triangle DCM est donc rectangle en C. Le théorème de Pythagore donne :

$DM^2 = DC^2 + CM^2 = 6 + CM^2$.

Si $DM = \sqrt{6}$, alors $DM^2 = 6$, donc $CM^2 = 0$, ce qui impose M=C.

RÉPONSE À RETENIR

Non : le seul point de $\mathcal{P}$ situé à la distance $\sqrt{6}$ de D est C. Il n'existe donc pas de point M différent de C satisfaisant la condition.

Question 3.a

Sujet p. 2, 3

La droite Δ a pour représentation paramétrique x=0, y=2+t, z=−1+t, avec t∈ℝ. Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Un point quelconque de Δ a pour coordonnées $(0\,;\,2+t\,;\,-1+t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. En remplaçant ces coordonnées dans le membre de gauche de l'équation de $\mathcal{P}$, on obtient :

$2 \times 0 + (2+t) - (-1+t) - 3 = 2 + t + 1 - t - 3 = 0$.

Cette égalité étant vraie pour tout réel t, tous les points de Δ appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{\Delta \subset \mathcal{P}}$.

Question 3.b

Sujet p. 2, 3

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur t=−2 dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} = (0\,;\,1\,;\,1)$. Notons $P(t) = (0\,;\,2+t\,;\,-1+t)$ le point de Δ associé au paramètre t. On a :

$\overrightarrow{P(t)D} = (4\,;\,-3-t\,;\,-1-t)$.

Pour que $P(t)$ soit le projeté orthogonal de D sur Δ, il faut et il suffit que $\overrightarrow{P(t)D}$ soit orthogonal à $\vec{u}$. Ainsi :

$\overrightarrow{P(t)D} \cdot \vec{u} = (-3-t) + (-1-t) = -4-2t = 0$, d'où $t = -2$.

Pour cette valeur, $H = P(-2) = (0\,;\,0\,;\,-3)$, et $\overrightarrow{HD} = (4\,;\,-1\,;\,1)$ est bien orthogonal à $\vec{u}$.

RÉPONSE À RETENIR

Le projeté orthogonal H est le point de Δ associé à $\boxed{t = -2}$, soit $\boxed{H(0\,;\,0\,;\,-3)}$.

Question 3.c

Sujet p. 2, 3

En déduire la distance du point D à la droite Δ.

La distance de D à Δ est la longueur DH, où H est le projeté orthogonal déterminé à la question précédente. Avec D(4\,;\,-1\,;\,-2) et H(0\,;\,0\,;\,-3), on a $\overrightarrow{HD} = (4\,;\,-1\,;\,1)$. Donc :

$d(D,\Delta) = DH = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{d(D,\Delta) = 3\sqrt{2}}$.

Exercice 3

4 points

Test de dépistage des allergies et loi binomiale

A

Question 1.

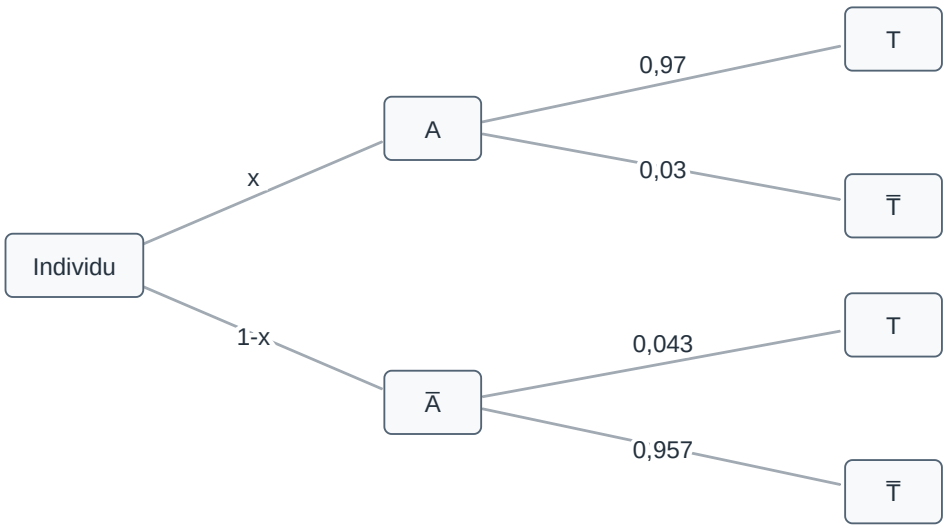
Sujet p. 3

> Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est positif ou négatif. Dans une population, si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ; si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas. Par ailleurs, 20 % des individus présentent un test positif. On note A l'événement « l'individu est allergique », T l'événement « l'individu présente un test positif », et x la probabilité de A : x=p(A). Reproduire et compléter l'arbre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

À la première séparation, les branches correspondent à *A* et à son contraire $\overline{A}$. Ainsi, $p(A) = x$ et $p(\overline{A}) = 1 - x$.

Si l'individu est allergique, le test est positif avec une probabilité de $0{,}97$, donc $p_A(T) = 0{,}97$ et $p_A(\overline{T}) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$. Si l'individu n'est pas allergique, le test est négatif avec une probabilité de $0{,}957$, donc $p_{\overline{A}}(\overline{T}) = 0{,}957$ et $p_{\overline{A}}(T) = 1 - 0{,}957 = 0{,}043$.

Arbre de probabilités du test d'allergie



Les probabilités des branches issues de A et de $\overline{A}$ sont des probabilités conditionnelles.

RÉPONSE À RETENIR

Les branches de l'arbre portent, dans l'ordre : x et $1 - x$; depuis A, $0{,}97$ et $0{,}03$; depuis $\overline{A}$, $0{,}043$ et $0{,}957$.

Question 2.a

Sujet p. 3

> Avec les données de la situation et x=p(A), démontrer l'égalité : p(T)=0,927x+0,043.

Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition. La formule des probabilités totales donne :

$$p(T) = p(A)\,p_A(T) + p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(T).$$

En remplaçant par les probabilités connues et par $p(A) = x$, on obtient :

$$p(T) = 0{,}97x + 0{,}043(1-x) = 0{,}97x + 0{,}043 - 0{,}043x = 0{,}927x + 0{,}043.$$

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{p(T) = 0{,}927x + 0{,}043}$.

Question 2.b

Sujet p. 3

> En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

On sait que $p(T) = 0{,}20$. En utilisant le résultat de la question 2.a :

$$0{,}20 = 0{,}927x + 0{,}043, \qquad x = \frac{0{,}20 - 0{,}043}{0{,}927} = \frac{0{,}157}{0{,}927} = \frac{157}{927} \approx 0{,}169.$$

Comme $x = p(A)$, cette valeur est la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit allergique. L'arrondi est donné au 10^{-3} près.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{p(A) = \dfrac{157}{927} \approx 0{,}169}$, soit environ $16{,}9\,\%$.

Question 3.

Sujet p. 3

> Justifier par un calcul l'affirmation suivante : « Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

On cherche la probabilité qu'un individu soit allergique sachant que son test est positif. Par la formule des probabilités conditionnelles :

$$p(A \mid T) = \frac{p(A \cap T)}{p(T)} = \frac{p(A)\,p_A(T)}{p(T)}.$$

Les données et le résultat de la question 2.b donnent :

$$p(A \mid T) = \frac{0{,}97 \times \frac{157}{927}}{0{,}20} = \frac{15229}{18540} \approx 0{,}821.$$

Cette probabilité est supérieure à $0{,}80$.

RÉPONSE À RETENIR

Si le test est positif, la probabilité que l'individu soit allergique est d'environ $\boxed{0{,}821}$, soit $82{,}1\,\%$.
L'affirmation est donc justifiée.

B

Question 1.

Sujet p. 4

> On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard ; on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise. La probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08. La variable aléatoire X associe à un échantillon de 150 habitants le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

Chaque tirage correspond à une épreuve de Bernoulli : l'habitant est allergique avec la probabilité constante $0{,}08$, ou ne l'est pas. Les 150 tirages sont indépendants et avec remise. Le nombre X de personnes allergiques suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}08$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{X \sim \mathcal{B}(150\,;\,0{,}08)}$.

Question 2.

Sujet p. 4

> Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Pour une loi binomiale de paramètres 150 et $0{,}08$, la probabilité d'obtenir exactement 20 personnes allergiques est :

$$p(X = 20) = \binom{150}{20} (0{,}08)^{20} (0{,}92)^{130}.$$

L'évaluation de cette expression donne environ $0{,}00821$, soit $0{,}008$ à 10^{-3} près.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{p(X = 20) \approx 0{,}008}$ à 10^{-3} près.

Question 3.

Sujet p. 4

> Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Dix pour cent de 150 vaut $0{,}10 \times 150 = 15$. L'événement demandé est donc $X \geq 15$. En utilisant l'événement contraire :

$$p(X \geq 15) = 1 - p(X \leq 14) = 1 - \sum_{k=0}^{14} \binom{150}{k} (0{,}08)^{k} (0{,}92)^{150-k}.$$

L'évaluation de cette probabilité donne environ $0{,}2196$, soit $0{,}220$ à 10^{-3} près.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{p(X \geq 15) \approx 0{,}220}$ à 10^{-3} près.

Exercice 4

7 points

Étude de fonctions : signe, convexité et variations

A

Question 1.

Sujet p. 4

> On définit sur l'intervalle]0;+∞[la fonction g par g(x)=2/x−1/x²+ln x, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que g est dérivable sur]0;+∞[et on note g′ sa fonction dérivée. Montrer que, pour x>0, le signe de g′(x) est celui du trinôme du second degré (x²−2x+2).

Pour tout $x > 0$, on dérive terme à terme :

$$g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}.$$

Comme $x^3 > 0$, le dénominateur est strictement positif. Le signe de $g'(x)$ est donc celui du trinôme $x^2 - 2x + 2$.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$, avec $x^3 > 0$. Ainsi, $g'(x)$ a le même signe que $x^2 - 2x + 2$.

Question 2.

Sujet p. 4

> En déduire que la fonction g est strictement croissante sur]0;+∞[.

On écrit le trinôme sous forme canonique :

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0.$$

D'après la question A.1, et puisque $x^3 > 0$, on a $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Une fonction dérivable dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle y est strictement croissante.

RÉPONSE À RETENIR

La fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Question 3.

Sujet p. 4

> Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution sur l'intervalle [0,5;1], que l'on notera α.

La fonction g est continue sur $[0{,}5;1]$, puisqu'elle est dérivable sur $]0;+\infty[$. Aux bornes de cet intervalle, on obtient :

$$g(0{,}5) = \frac{2}{0{,}5} - \frac{1}{(0{,}5)^2} + \ln(0{,}5) = -\ln 2 < 0, \qquad g(1) = 2 - 1 + \ln 1 = 1 > 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'une solution de $g(x) = 0$ dans $]0{,}5;1[$. Comme g est strictement croissante sur tout $]0;+\infty[$, elle ne peut avoir qu'une seule solution.

RÉPONSE À RETENIR

L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0{,}5;1]$, avec $0{,}5 < \alpha < 1$.

Question 4.

Sujet p. 4

> On donne le tableau de signes de g sur]0;+∞[: g(x) est négatif avant α, nul en α et positif après α. Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

La fonction g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$. Ainsi, si $0 < x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha) = 0$. Si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha) = 0$. Cela justifie le tableau de signes donné.

RÉPONSE À RETENIR

Sur $]0; +\infty[$, $g(x) < 0$ pour $0 < x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$, et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

B

Question 1.

Sujet p. 4

> On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0;+∞[par f(x)=e^x ln x. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On admet que f est deux fois dérivable sur]0;+∞[et que, pour tout réel x>0, f'(x)=e^x(1/x+ln x). Démontrer que, pour tout réel x>0, f''(x)=e^x(2/x−1/x²+ln x).

On dérive le produit $f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$. La dérivée de e^x est e^x, et celle de $\frac{1}{x} + \ln x$ est $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Ainsi, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + e^x \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \\ &= e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right). \end{aligned}$$

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x > 0$, $f''(x) = e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$.

Question 2.a

Sujet p. 4

> On pourra remarquer que, pour tout réel x>0, f''(x)=e^x×g(x), où g désigne la fonction étudiée dans la partie A. Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur]0;+∞[. Justifier.

Pour tout $x > 0$, $f''(x) = e^x g(x)$. Comme $e^x > 0$, $f''(x)$ a le même signe que $g(x)$. D'après la partie A, g est négative avant α, s'annule en α, puis est positive après α.

RÉPONSE À RETENIR

Le tableau de signes de f'' est donc :

x	$]0; \alpha[$	α	$]\alpha; +\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Question 2.b

Sujet p. 4

> Justifier que la courbe C_f admet un unique point d'inflexion A.

L'expression obtenue en B.1 montre que $f''(x) = e^x g(x)$ est continue sur $]0;+\infty[$. D'après la partie A, g ne s'annule qu'en α, et change de signe en ce point. Comme $e^x > 0$, f'' change également de signe en α. La courbe admet donc un point d'inflexion d'abscisse α. Il est unique, car f'' ne change de signe nulle part ailleurs.

L'ordonnée du point est $f(\alpha) = e^\alpha \ln \alpha$.

RÉPONSE À RETENIR

La courbe C_f admet un unique point d'inflexion A, de coordonnées $(\alpha; e^\alpha \ln \alpha)$.

Question 2.c

Sujet p. 4

> Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle]0;+∞[. Justifier.

Une fonction deux fois dérivable est concave là où sa dérivée seconde est négative et convexe là où sa dérivée seconde est positive. Or $f''(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$, et $f''(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est strictement concave sur $]0;\alpha[$, puis strictement convexe sur $]\alpha;+\infty[$. Le changement de convexité a lieu en $x = \alpha$.

Question 3.a

Sujet p. 4

> Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Lorsque $x \to 0^+$, on a $e^x \to 1$ et $\ln x \to -\infty$, donc $e^x \ln x \to -\infty$. Lorsque $x \to +\infty$, les deux facteurs e^x et $\ln x$ tendent vers $+\infty$, donc leur produit tend vers $+\infty$.

RÉPONSE À RETENIR

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Question 3.b

Sujet p. 4

> Montrer que f'(α)=e^α/α²(1−α). On rappelle que α est l'unique solution de l'équation g(x)=0.

Comme $g(\alpha) = 0$, on a :

$$\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \ln \alpha = 0, \qquad \text{donc} \qquad \ln \alpha = -\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}.$$

En remplaçant $\ln \alpha$ dans l'expression de $f'(\alpha)$, il vient :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= e^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + \ln \alpha\right) \\ &= e^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) \\ &= \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha). \end{aligned}$$

RÉPONSE À RETENIR

$f'(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha^2}(1-\alpha)$.

Question 3.c

Sujet p. 4

Démontrer que f'(α)>0 et en déduire le signe de f'(x) pour x appartenant à]0;+∞[.

On sait que $0{,}5 < \alpha < 1$, donc $e^{\alpha} > 0$, $\alpha^2 > 0$ et $1 - \alpha > 0$. La formule de B.3.b donne alors $f'(\alpha) > 0$.

Sur $]0;\alpha[$, $f'' < 0$, donc f' est strictement décroissante. Ainsi, pour $x < \alpha$, $f'(x) > f'(\alpha) > 0$. Sur $]\alpha;+\infty[$, $f'' > 0$, donc f' est strictement croissante et, pour $x > \alpha$, $f'(x) > f'(\alpha) > 0$. Au point α, la dérivée est également positive.

RÉPONSE À RETENIR

On a $f'(\alpha) > 0$, et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Question 3.d

Sujet p. 4

En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur]0;+∞[.

D'après la question précédente, $f'(x) > 0$ sur tout $]0;+\infty[$, donc f y est strictement croissante. Les limites aux bornes de l'intervalle sont celles calculées en B.3.a. De plus, comme $\alpha < 1$, on a $\ln\alpha < 0$, donc $f(\alpha) = e^{\alpha}\ln\alpha < 0$.

RÉPONSE À RETENIR

Le tableau de variations complet est :

x	0^+	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$f'(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha^2}(1-\alpha) > 0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\ f(\alpha) = e^{\alpha}\ln\alpha < 0\ \nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f est strictement croissante de $-\infty$ vers $+\infty$ sur $]0;+\infty[$.

Sujet : https://www.sujetdebac.fr/annales-pdf/2023/spe-mathematiques-2023-metropole-1-remplacement-sujet-officiel.pdf
© FormaV EI • Proposition de correction, distincte d'un corrigé officiel.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.