Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

CORRECTION DU BAC : SUJET DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

METROPOLE – ANTILLES – GUYANE 2023 – JOUR 2

Exercice 1 : QCM sur les probabilités

D'après l'énoncé : $P(A) = \frac{2}{5}$ $P_A(G) = \frac{7}{10}$ et $P(G) = \frac{12}{25}$

1. On calcule la probabilité que le joueur choisisse le monde et gagne la partie, soit $P(A \cap G)$.

$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$ **Réponse c**

2. On calcule $P_B(G)$.

$P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{P(B \cap G)}{1-P(A)}$

Or, d'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(B \cap G) + P(A \cap G)$

Soit, $P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Donc, $P_B(G) = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$ **Réponse b**

3. Jouer une partie est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le joueur gagne la partie » de probabilité $\frac{12}{25}$.

On répète 10 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on assimile la situation à un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{12}{25}$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de parties gagnées). X suit donc la loi binomiale $B\left(10 ; \frac{12}{25}\right)$.

On calcule $P(X = 6)$.

$P(X = 6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 = 210 \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 \approx 0{,}188$ au millième près

Réponse c

4. On programme sur la calculatrice la fonction $BinomialCD\left(X, 10, \frac{12}{25}\right)$.

D'après la calculatrice, $P(X \leq 3) \approx 0{,}207$. Donc l'entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, de gagner au plus n parties est de 0,207 est 3.

Réponse b

5. On calcule $P(X \geq 1)$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{12}{25}\right)^0 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

$P(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ **Réponse d**

Exercice 2 : Suites

Partie A : Etude d'un premier modèle en laboratoire

1. Chaque mois, la population d'insectes dans le jardin botanique augmente de 60%, elle est donc multipliée par 1,6.
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}6u_n$.
   Donc, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}6$ et de premier terme $u_0 = 0{,}1$. Donc, pour tout entier naturel, $u_n = u_0 \times q^n$ soit $\boldsymbol{u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}6^n = +\infty$ car $1{,}6 > 1$. Donc, par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

3. On cherche n tel que $u_n > 0{,}4$. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}1 \times 1{,}6^n > 0{,}4 \Leftrightarrow 1{,}6^n > 4 \Leftrightarrow \ln 1{,}6^n > \ln 4$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.

   $\Leftrightarrow n \ln 1{,}6 > \ln 4 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 4}{\ln 1{,}6}$ car $1{,}6 > 1$ donc $\ln 1{,}6 > 0$

   Or, $\frac{\ln 4}{\ln 1{,}6} \approx 2{,}95$ donc $n \geq 3$. Ainsi, **le plus petit entier naturel $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{u_n > 0{,}4}$ est 3.**

4. D'après la question précédente, la population d'insectes dans le jardin botanique dépassera les 0,4 million d'insectes, soit 400 000 insectes au bout de 3 mois. Ainsi, selon ce modèle, **l'équilibre du milieu naturel sera préservé.**

Partie B : Etude d'un second modèle

1. On calcule v_1.
   $v_1 = 1{,}6v_0 - 1{,}6v_0^2 = 1{,}6 \times 0{,}1 - 1{,}6 \times 0{,}1^2 = 0{,}144$
   Ainsi, **au bout d'un mois, il y aura 0,144 million, soit 144 000 insectes dans le jardin botanique.**

2. **a.** Pour tout $x \in \left[0\ ;\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x \Leftrightarrow 1{,}6x - 1{,}6x^2 - x = 0 \Leftrightarrow 0{,}6x - 1{,}6x^2 = 0 \Leftrightarrow x(0{,}6 - 1{,}6x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ 0{,}6 - 1{,}6x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = 0{,}375$
   $\boldsymbol{S = \{0\ ;\ 0{,}375\}}$

   b. Dérivons f afin de trouver ses variations.
   La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ comme fonction polynôme du second degré.
   Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) = 1{,}6 - 3{,}2x$
   Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1{,}6 - 3{,}2x \geq 0 \Leftrightarrow 1{,}6 \geq 3{,}2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.
   Ainsi, pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ donc **la fonction $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $\left[\mathbf{0};\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]$.**

3. a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Initialisation : $v_0 = 0{,}1$ et $v_1 = 0{,}144$ or $0 \leq 0{,}1 \leq 0{,}144 \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$.
La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k, $0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$ et montrons qu'alors $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$
La fonction f est croissance sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc elle conserve l'ordre donc, on a :
$f(0) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.
Or, par définition, $f(v_k) = v_{k+1}$ et $f(v_{k+1}) = v_{k+2}$. De plus, $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4$ et $0{,}4 \leq \frac{1}{2}$. On a donc : $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 0{,}4 \leq \frac{1}{2}$ soit $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.
La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$.

b. D'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est convergente vers $\boldsymbol{l \leq \frac{1}{2}}$.**

c. On sait que l est solution de l'équation $f(x) = x$. Donc, d'après la question 2-a, on a $l = 0$ ou $l = 0{,}375$. Or, la suite (v_n) est croissante et $v_0 = 0{,}1 > 0$ donc l ne peut être égale à 0. Ainsi, **la limite $\boldsymbol{l}$ de la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est 0,375.**
Ainsi, à long terme, la population d'insectes dans le jardin botanique va se rapprocher de 0,375 million d'individus, soit 375 000 insectes, et, comme la suite (v_n) est croissante, elle ne les dépassera pas. Ainsi, cette population n'atteindra jamais 400 000 insectes. Donc, **selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera respecté**.

4. a. Cet algorithme renvoie le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq a$. Or, d'après la question précédente, la suite (v_n) ne dépasse jamais la valeur 0,4 car la population d'insectes ne dépasse pas les 400 000 individus. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n < 0{,}4$, donc **la saisie de « seuil(0.4) » ne renvoie rien.**

b. La saisie de « seuil(0.35) » renvoie le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 0{,}35$. D'après la calculatrice, $v_5 < 0{,}35$ et $v_6 > 0{,}35$. Donc, **la saisie de « seuil(0.35) » renvoie la valeur 6.** Ainsi, **la population d'insectes dépassera les 0,35 million d'individus, soit 350 000 insectes au bout du sixième mois.**

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

1. a. D'après son équation cartésienne, le plan P_1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(\mathbf{2};\mathbf{1};\mathbf{-1})$.

b. Vérifions si les vecteurs normaux aux plans P_1 et P_2 sont orthogonaux.
$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 2\times 1 + 1\times(-1) + (-1)\times 1 = 2 - 1 - 1 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux donc **les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires.**

2. a. Le plan P_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1;-1;1)$, donc le plan P_2 a pour équation cartésienne : $x - y + z + d$ où d est un réel.
De plus, $B(1\,;1\,;2) \in P_2$, donc
$x_B - y_B + z_B + d = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$
Donc, le plan P_2 a pour équation cartésienne : $\boldsymbol{x - y + z - 2}$.

b. Soit M un point quelconque de la droite Δ. Ainsi, pour tout réel t, $M(0;-2+t;t)$.
Vérifions que $M \in P_1$.
Pour tout réel t, $2x_M + y_M - z_M + 2 = 2\times 0 + (-2) + t - t + 2 = 0$. Donc le point M appartient au plan P_1 donc la droite Δ est incluse dans le plan P_1.
Vérifions si $M \in P_2$.
Pour tout réel t, $x_M - y_M + z_M - 2 = 0 - (-2+t) + t - 2 = 2 - t + t - 2 = 0$.
Donc le point M appartient au plan P_2 donc la droite Δ est incluse dans le plan P_2.
Ainsi, la droite Δ est incluse dans le plan P_1 et dans le plan P_2. Ainsi, **la droite Δ est la droite d'intersection des plans P_1 et P_2.**

3. a. Pour tout réel t, $\overrightarrow{AM_t}(x_{M_t} - x_A\,;y_{M_t} - y_A\,;z_{M_t} - z_A)$ $\overrightarrow{AM_t}(-1\,;-2+t-1;t-1)$. $\overrightarrow{AM_t}(-1\,;t-3\,;t-1)$
Donc pour tout réel t, $AM_t = \left|\left|\overrightarrow{AM_t}\right|\right| = \sqrt{(-1)^2 + (t-3)^2 + (t-1)^2}$
$AM_t = \sqrt{1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1} = \sqrt{\boldsymbol{2t^2 - 8t + 11}}$

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = AM_t^2 = \left(\sqrt{2t^2 - 8t + 11}\right)^2 = 2t^2 - 8t + 11$.
Le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ. Ainsi, H est le point de la droite Δ tel que la distance AM_t est minimale. On étudie donc les variations de la fonction f.
f est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 2$; $b = -8$ et $c = 11$.
Donc on a : $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2\times 2} = \frac{8}{4} = 2$
Et $\beta = f(\alpha) = f(2) = 2\times 2^2 - 8\times 2 + 11 = 3$
$a = 2 > 0$ donc, on a :

t	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	↘	3	↗

Ainsi, f admet pour minimum 3. Donc, la valeur minimale de AM_t^2 est 3, donc la valeur minimale de AM_t est $\sqrt{3}$, AM_t étant une longueur qui est donc positive. Ainsi, on peut en déduire que $\boldsymbol{AH = \sqrt{3}}$.

4. **a.** La droite D_1 est orthogonale au plan P_1 donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan P_1. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n_1}(2\ ;1\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de la droite D_1 qui passe par le point $A(1\ ;1\ ;1)$.

La droite D_1 a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 2k} \\ \boldsymbol{y = 1 + k} \\ \boldsymbol{z = 1 - k} \end{cases} \quad \boldsymbol{k \in \mathbb{R}}$.

b. La droite D_1 est orthogonale au plan P_1 et passe par le point A. Ainsi, le projeté orthogonal H_1 du point A sur la droite D_1 est le point d'intersection de la droite D_1 et du plan P_1. Donc, les coordonnées de H_1 vérifient :

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 + 2k) + 1 + k - (1 - k) + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 + 4k + 1 + k - 1 + k + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k + 4 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ x = 1 + 2k = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ y = 1 + k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - k = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$ donc $\boldsymbol{H_1\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)}$.

5. Montrons que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle.

Montrons d'abord que ce quadrilatère est un parallélogramme.

$\overrightarrow{HH_1}(x_{H_1} - x_H; y_{H_1} - y_H; z_{H_1} - z_H)$ $\overrightarrow{HH_1}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{H_2A}(x_A - x_{H_2}; y_A - y_{H_2}; z_A - z_{H_2})$ $\overrightarrow{H_2A}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

On remarque : $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{H_2A}$. Ainsi, le quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme.

Montrons maintenant que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle. Pour cela, montrons qu'il a deux côtés consécutifs perpendiculaires.

$\overrightarrow{AH_1}(x_{H_1} - x_A\ ; y_{H_1} - y_A\ ; z_{H_1} - z_A)$ $\overrightarrow{AH_1}\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

Donc, $\overrightarrow{AH_1}.\overrightarrow{H_2A} = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{H_2A}$ sont orthogonaux, donc les droites (AH_1) et (H_2A) sont perpendiculaires, donc le parallélogramme AH_1HH_2 a deux côtés consécutifs perpendiculaires, donc **le quadrilatère $\boldsymbol{AH_1HH_2}$ est un rectangle**.

Exercice 4 : Fonctions

1. a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{-x})=+\infty$

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc par composition $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$**.**

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$

Or, $\lim\limits_{X\to1}\ln X=\ln 1=0$ donc par composition $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$**.**

Ainsi, **la courbe $\boldsymbol{C}$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $\boldsymbol{y=0}$ en $+\infty$.**

c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose : $f=\ln u$ avec $u(x)=1+e^{-x}$

Donc $f'=\frac{u'}{u}$ avec $u'(x)=-e^{-x}$

Pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}=\frac{-1}{1+e^x}}$

d. Pour tout réel x, $e^x>0$ donc $1+e^x>1>0$ et $-1<0$ donc par quotient, $f'(x)<0$.

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a donc :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de $\boldsymbol{f}$	$+\infty$ ↘ **0**

2. a. <u>Equation de T_0 :</u> $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=f'(0)x+f(0)$

Or, $f'(0)=\frac{-1}{1+e^0}=-\frac{1}{2}$ et $f(0)=\ln(1+e^{-0})=\ln 2$

Donc, T_0 a pour équation : $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\ln 2}$.

b. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de -1 par la somme de 1 et de la fonction exponentielle (qui ne s'annule donc pas).

Pour tout réel x, $f''(x)=\frac{-1\times(-e^x)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Or, pour tout réel x, $e^x>0$ et $(1+e^x)^2>0$ donc par quotient, $f''(x)>0$ donc **la fonction $\boldsymbol{f}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.**

c. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc la courbe C est au-dessus de ses tangentes, et en particulier de T_0. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\ln 2\right)\geq 0$

soit $\boldsymbol{f(x)\geq-\frac{1}{2}x+\ln 2}$

3. **a.** Pour tout réel x, $f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{x}) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}\right)$

$\boldsymbol{f(x) - f(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x}(e^{x}+1)}{1+e^{x}}\right) = \ln e^{-x} = -x}$

b. Déterminons le coefficient directeur de T_0 et de (M_aN_a)

T_0 est la tangente à C au point d'abscisse 0 donc son coefficient directeur est $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Calculons le coefficient directeur m de la droite (M_aN_a).

Pour tout réel a, $m = \frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$ car pour tout réel x, $f(x) - f(-x) = -x$.

Ainsi, les droites T_0 et (M_aN_a) ont le même coefficient directeur donc **elles sont parallèles.**

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.