Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Métropole et La Réunion

Sujet 2 – 12 septembre 2023

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache. On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée. Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie. Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ». On choisit une vache au hasard dans la région.
Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0,992 ;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984.

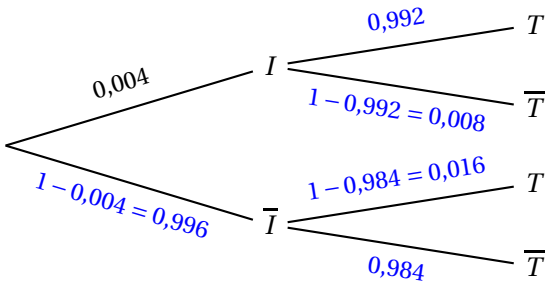
On désigne par :

- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection » ;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note $\overline{I}$ l'évènement contraire de I et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. **a.** La probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif est : $P\left(\overline{I} \cap \overline{T}\right) = 0{,}996 \times 0{,}984 \approx 0{,}980$.

b. La probabilité que la vache présente un test positif est $P(T)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = 0{,}004 \times 0{,}992 + 0{,}996 \times 0{,}016 = 0{,}019\,904$ soit 0,020 à 10^{-3} près,

c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif, c'est-à-dire : $P_T(I)$.
$P_T(I) = \dfrac{P(I \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}004 \times 0{,}992}{0{,}02} \approx 0{,}199$

d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(\overline{I} \cap T\right)$, ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(I \cap \overline{T}\right)$.
La probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache est donc : $P\left(\overline{I} \cap T\right) + P\left(I \cap \overline{T}\right) = 0{,}996 \times 0{,}016 + 0{,}004 \times 0{,}008 = 0{,}015\,968 \approx 0{,}016$ au millième près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. L'expérience élémentaire consiste à savoir si, pour une vache donnée, le test est positif (avec une probabilité $p = 0{,}02$) ou non ; il n'y a donc que deux issues.

On exécute cette expérience élémentaire 100 fois pour extraire un échantillon de taille $n = 100$ en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.

b. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est : $P(X = 3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1 - 0{,}02)^{100-3} \approx 0{,}182$.

c. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est : $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}859$ (résultat donné par la calculatrice).

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

La valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.

C'est-à-dire : $1 - P(X = 0) \geqslant 0{,}99$ ou encore : $0{,}01 \geqslant P(X = 0)$.

On résout l'inéquation : $P(X = 0) \leqslant 0{,}01$.

$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times (1 - 0{,}02)^{n-0} = 0{,}98^n$

$0{,}98^n \leqslant 0{,}01 \iff \ln(0{,}98^n) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \times \ln(0{,}98) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)}$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}95$ donc il faut un échantillon d'au moins 228 vaches pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

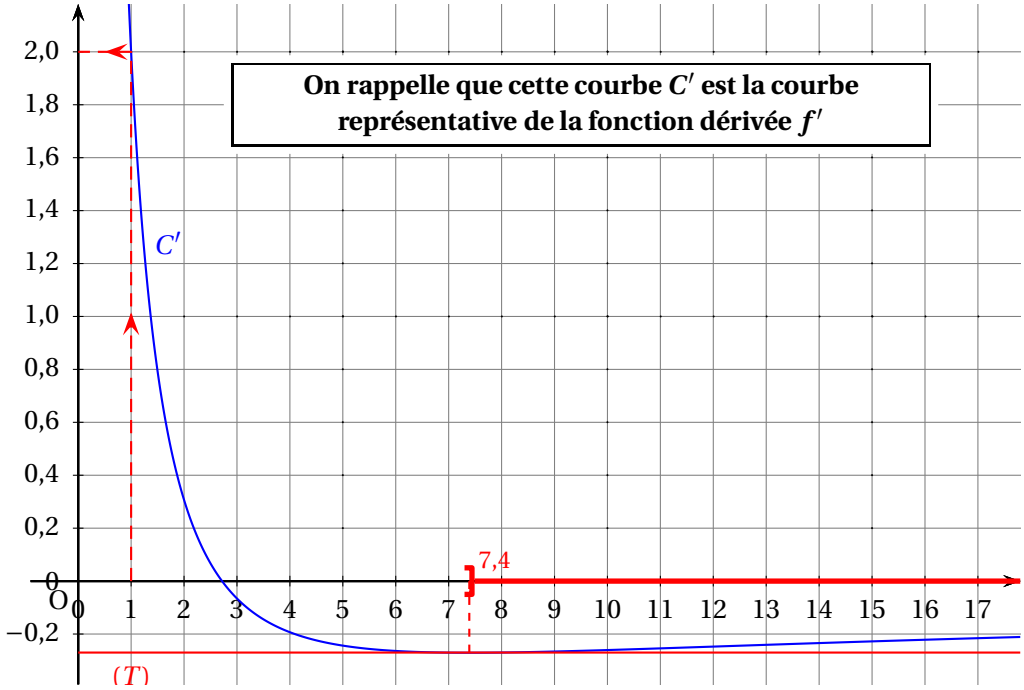
EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.
La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).

1. **a.** Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1 est $f'(1)$; graphiquement, c'est environ 2.

b. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est le plus grand intervalle sur lequel la fonction f' est croissante, soit $[7{,}4\,;\,+\infty[$.

2. **a.** $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \ln x = -\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (2 - \ln x) \times \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



b. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\ln x = +\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} (2-\ln x)\times \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

3. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = 0$; on résout cette équation.

$f(x) = 0 \iff (2-\ln x)\times \ln x = 0 \iff 2-\ln x = 0$ ou $\ln x = 0 \iff \ln x = 2$ ou $\ln x = 0$

$\iff x = \mathrm{e}^2$ ou $x = 1$

Les coordonnées des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont donc $(1\,;\,0)$ et $(\mathrm{e}^2\,;\,0)$.

4. **a.** Pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(0-\frac{1}{x}\right)\times \ln x + (2-\ln x)\times \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{2-\ln x}{x} = \frac{2-2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$$

b. $f'(x)$ s'annule et change de signe quand $1-\ln x = 0$, donc pour $x = \mathrm{e}$.

$f(\mathrm{e}) = (2-\ln \mathrm{e})\times \ln \mathrm{e} = (2-1)\times 1 = 1$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		e		$+\infty$
x	0	+		+	
$1-\ln x$	‖	+	0	−	
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.

La fonction f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$; on résout cette inéquation.

$f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2} \geqslant 0 \iff \ln x - 2 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 2 \iff x \geqslant \mathrm{e}^2$

Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est donc $\left[\mathrm{e}^2\,;+\infty\right[$.

$f''(x) = 0 \iff 2 - \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}^2$ et $f(\mathrm{e}^2) = (2 - \ln \mathrm{e}^2) \times \ln \mathrm{e}^2 = 0$

Donc la courbe C admet le point de coordonnées $(\mathrm{e}^2\,;0)$ comme point d'inflexion.

EXERCICE 3 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n \end{cases}$

1.
- Pour $n = 1$: $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{1}\right) u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}(2)\dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$
- Pour $n = 2$: $u_3 = u_{2+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) u_2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{2}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{3}{\mathrm{e}^3}$

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. On complète les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`  u = 1/e`
L_3	`  for i in range(1, n):`
L_4	`    u = 1/e*(1+1/i)*u`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

a. $n \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \Longrightarrow 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2$ donc $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}$

b. $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$

Or pour tout n, $u_n > 0$, donc : $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n \leqslant u_n$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est décroissante.

c. Pour tout n, $u_n > 0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

On a démontré que cette suite était décroissante donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

4. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n = \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$: $u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

  Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité**

  On suppose que la propriété est vraie au rang $n \geqslant 1$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $u_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}}$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$.

b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4 — 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère :

- les points A$(-1\,;\,-2\,;\,3)$, B$(1\,;\,-2\,;\,7)$ et C$(1\,;\,0\,;\,2)$;
- la droite Δ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = -4+3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x+2y+z-4=0$;
- le plan $\mathscr{Q}$ d'équation cartésienne : $-6x-4y-2z+7=0$.

1. Lequel des points suivants appartient au plan $\mathscr{P}$?

a. $R(1\,;\,-3\,;\,1)$; **b.** $S(1\,;\,2\,;\,-1)$; **c.** $T(1\,;\,0\,;\,1)$; **d.** $U(2\,;\,-1\,;\,1)$.

$3x_\mathrm{T}+2y_\mathrm{T}+z_\mathrm{T}-4 = 3+0+1-4 = 0$ donc T $\in \mathscr{P}$ **Réponse c.**

2. Le triangle ABC est :

a. équilatéral ; **b.** rectangle isocèle ;
c. isocèle non rectangle ; **d.** rectangle non isocèle.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ont respectivement pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\times2+0\times2+4\times(-1) = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ donc ABC est rectangle en A.
$\mathrm{AB}^2 = 2^2+0^2+4^2 = 20$ et $\mathrm{AC}^2 = 2^2+2^2+(-1)^2 = 9$, donc AB $\neq$ AC
Le triangle ABC n'est pas isocèle. **Réponse d.**

3. La droite Δ est :

a. orthogonale au plan $\mathscr{P}$; **b.** sécante au plan $\mathscr{P}$;
c. incluse dans le plan $\mathscr{P}$; **d.** strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$, et le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.
$\vec{v}\cdot\vec{n} = -1\times3+0\times2+3\times1 = 0$ donc $\vec{v}\perp\vec{n}$, et donc Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.
Le point H de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,-4)$ appartient à Δ.
$3x_\mathrm{H}+2y_\mathrm{H}+z_\mathrm{H}-4 = 3\times1+2\times2-4-4 = -1 \neq 0$ donc H $\notin \mathscr{P}$.
La droite Δ n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$. **Réponse d.**

4. On donne le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 20$.
Une mesure au degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est :

a. 34° ; **b.** 120° ; **c.** 90° ; **d.** 0°.

Le triangle ABC est rectangle en A donc l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est un angle aigu. **Réponse a.**

5. L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est :

a. un plan ; **b.** l'ensemble vide ;
c. une droite ; **d.** réduite à un point.

Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et le plan $\mathscr{Q}$ a pour vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}-6\\-4\\-2\end{pmatrix}$.
$\vec{n'} = -2\vec{n}$ donc les plans sont parallèles.
Le point T appartient à $\mathscr{P}$.
$-6x_T - 4y_T - 2z_T + 7 = -6 \times 1 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 7 = -1 \neq 0$ donc T $\notin \mathscr{Q}$
Les deux plans sont donc strictement parallèles. **Réponse b.**

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.