Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2023 • Jour 2

Code sujet **23MATJ2NC1** 4 heures

Proposition de corrigé pédagogique • FormaV

Se repérer dans le corrigé

Exercice 1 — Géométrie dans un cube : plans, droites, aire et volume
10 réponses • sujet p. 2–2

Exercice 2 — Étude d’une fonction exponentielle, de sa convexité et de ses tangentes
8 réponses • sujet p. 3–3

Exercice 3 — Suite définie par récurrence et transformation en suite arithmétique
9 réponses • sujet p. 4–4

Exercice 4 — QCM : probabilités conditionnelles, pannes indépendantes et répétition de lancers
20 réponses • sujet p. 5–5

Les numéros, parties et pages renvoient au sujet original. Chaque réponse rappelle la consigne, explique la démarche et donne le résultat.

Exercice 1

5 points

Géométrie dans un cube : plans, droites, aire et volume

Question 1.

Sujet p. 2

> On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 et K, milieu du segment [HG]. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$, on a $C(1;1;0)$, $F(0;1;1)$ et $K(1;\frac{1}{2};1)$. Ainsi, $\overrightarrow{CF} = (-1;0;1)$ et $\overrightarrow{CK} = (0;-\frac{1}{2};1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : la première coordonnée de $\overrightarrow{CK}$ est nulle, contrairement à celle de $\overrightarrow{CF}$. Les points C, F, K ne sont donc pas alignés, ce qui garantit qu'ils définissent un plan.

RÉPONSE À RETENIR

Les points C, F, K définissent un plan car ils ne sont pas alignés.

2

Question 2. a.

Sujet p. 2

> Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.

Le cube est d'arête 1, et K est le milieu de

$$HG$$

. Les longueurs demandées sont donc $KG = \frac{1}{2}$, $GF = 1$ et $GC = 1$.

RÉPONSE À RETENIR

$KG = \frac{1}{2}$, $GF = 1$ et $GC = 1$.

Question 2. b.

Sujet p. 2

> Calculer l'aire du triangle FGC.

Les segments GF et GC sont deux arêtes du cube issues de G, donc ils sont perpendiculaires. Le triangle FGC est rectangle en G. Son aire vaut donc $\frac{1}{2} \times GF \times GC = \frac{1}{2} \times 1 \times 1$.

RÉPONSE À RETENIR

L'aire du triangle FGC est $\boxed{\frac{1}{2}}$.

Question 2. c.

Sujet p. 2

> Calculer le volume du tétraèdre FGCK. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par V = 1/3 × B × h, où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

On choisit le triangle FGC comme base. Ses sommets ont tous pour ordonnée 1, donc le plan (FGC) a pour équation $y = 1$. Le point $K(1;\frac{1}{2};1)$ est à une distance $\frac{1}{2}$ de ce plan. En utilisant l'aire de base $\frac{1}{2}$, on obtient $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

RÉPONSE À RETENIR

Le volume du tétraèdre $FGCK$ est $\boxed{\frac{1}{12}}$.

3

Question 3. a.

Sujet p. 2

Dans le repère orthonormé (A ; AD, AB, AE), on note n⃗ le vecteur de coordonnées (1 ; 2 ; 1). Démontrer que n⃗ est normal au plan (CFK).

Les vecteurs $\overrightarrow{CF} = (-1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{CK} = (0; -\frac{1}{2}; 1)$ dirigent le plan (CFK). Avec $\vec{n} = (1; 2; 1)$, on calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = -1 + 0 + 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CK} = 0 - 1 + 1 = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

RÉPONSE À RETENIR

$\vec{n} = (1; 2; 1)$ est un vecteur normal au plan (CFK).

Question 3. b.

Sujet p. 2

En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est x + 2y + z − 3 = 0.

Un plan de vecteur normal $(1; 2; 1)$ a une équation de la forme $x + 2y + z + d = 0$. Comme $C(1; 1; 0)$ appartient au plan (CFK), ses coordonnées vérifient cette équation : $1 + 2 + d = 0$, donc $d = -3$.

RÉPONSE À RETENIR

Une équation cartésienne du plan (CFK) est $\boxed{x + 2y + z - 3 = 0}$.

Question 4.

Sujet p. 2

On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK). Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + t, avec t ∈ ℝ.

La droite Δ passe par $G(1; 1; 1)$ et est orthogonale au plan (CFK). Son vecteur directeur est donc le vecteur normal $\vec{n} = (1; 2; 1)$. Une représentation paramétrique s'obtient en ajoutant à G un multiple réel de ce vecteur : $(x; y; z) = (1; 1; 1) + t(1; 2; 1)$.

RÉPONSE À RETENIR

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5

Question 5. a.

Sujet p. 2

> Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK). Déterminer les coordonnées du point L.

À l'intersection de Δ avec le plan (CFK), les coordonnées paramétriques vérifient $x + 2y + z - 3 = 0$. En substituant $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$ et $z = 1 + t$, on obtient $1 + 6t = 0$, donc $t = -\frac{1}{6}$. On remplace cette valeur dans les trois expressions paramétriques.

RÉPONSE À RETENIR

$L\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Question 5. b.

Sujet p. 2

> En déduire que LG = √6/6.

Comme L et G appartiennent à Δ, la différence de leurs coordonnées donne $\overrightarrow{GL} = (-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{6})$. Ainsi, $LG = \sqrt{(\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{6})^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{LG = \frac{\sqrt{6}}{6}}$.

Question 6.

Sujet p. 2

> En utilisant la question 2, déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

On prend cette fois CFK comme base du tétraèdre. La hauteur correspondante est LG, car G appartient à la droite Δ, perpendiculaire au plan (CFK), et L est l'intersection de cette droite avec le plan. En utilisant le volume $\frac{1}{12}$ obtenu à la question 2. c., on écrit $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(CFK) \times \frac{\sqrt{6}}{6}$. Donc $\mathcal{A}(CFK) = \frac{3}{12} \times \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

RÉPONSE À RETENIR

L'aire exacte du triangle CFK est $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$.

Exercice 2

5 points

Étude d'une fonction exponentielle, de sa convexité et de ses tangentes

Question 1.

Sujet p. 3

> On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par f(x) = xe⁻ˣ, et C_f sa courbe représentative. En remarquant que, pour tout x ∈ [0 ; +∞[, f(x) = x/eˣ, démontrer que la courbe C_f possède une asymptote en +∞ dont on donnera une équation.

Pour tout $x \geq 0$, on peut écrire $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. Pour $x > 0$, l'inégalité $e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$ entraîne $0 \leq \dfrac{x}{e^x} \leq \dfrac{2}{x}$. Comme $\dfrac{2}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 0$.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{y = 0}$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Question 2.

Sujet p. 3

> Démontrer que, pour tout réel x appartenant à [0 ; +∞[, f'(x) = (1 − x)e⁻ˣ.

On dérive le produit $f(x) = xe^{-x}$. Comme $(e^{-x})' = -e^{-x}$, on obtient, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\boxed{f'(x) = (1-x)e^{-x}}$.

Question 3.

Sujet p. 3

> Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; +∞[, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} > 0$. Le signe de $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ est donc celui de $1 - x$: il est positif si $0 \leq x < 1$, nul en 1, puis négatif si $x > 1$. Ainsi, f croît sur $[0;1]$, puis décroît sur $[1;+\infty[$.

On a $f(0) = 0$, $f(1) = \dfrac{1}{e}$, et, d'après la question 1, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Le maximum est donc atteint en $x = 1$ et vaut $\dfrac{1}{e}$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	0	$\nearrow \dfrac{1}{e}$	$\searrow 0$

RÉPONSE À RETENIR

f croît de 0 à $\frac{1}{e}$ sur $[0;1]$, puis décroît de $\frac{1}{e}$ vers 0 sur $[1;+\infty[$. Son maximum est $\boxed{\frac{1}{e}}$, atteint pour $x = 1$.

Question 4.

Sujet p. 3

> Déterminer, sur l'intervalle [0 ; +∞[, le nombre de solutions de l'équation f(x) = 367/1000.

Sur $[0;1]$, la fonction est continue et strictement croissante, de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1/e$. Sur $[1;+\infty[$, elle est continue et strictement décroissante, de $1/e$ vers 0.

Or $0 < \frac{367}{1000} < \frac{1}{e}$. Par exemple, à la calculatrice $e \approx 2{,}71828 < 2{,}72 < \frac{1000}{367}$, ce qui établit la seconde inégalité. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie donnent alors une solution sur chacun des deux intervalles. Ces solutions sont distinctes, car l'une est inférieure à 1 et l'autre supérieure à 1.

RÉPONSE À RETENIR

L'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ possède exactement $\boxed{2}$ solutions sur $[0;+\infty[$.

Question 5.

Sujet p. 3

> On admet que, pour tout x appartenant à [0 ; +∞[, f″(x) = e⁻ˣ(x − 2). Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[.

On admet que $f''(x) = e^{-x}(x-2)$. Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 2$: $f''(x) < 0$ pour $0 \leq x < 2$, $f''(2) = 0$, et $f''(x) > 0$ pour $x > 2$.

La fonction est donc concave sur $[0;2]$, puis convexe sur $[2;+\infty[$. Le signe de sa dérivée seconde change en 2, donc la courbe possède un point d'inflexion d'abscisse 2. Son ordonnée est $f(2) = 2e^{-2}$.

RÉPONSE À RETENIR

f est concave sur $[0;2]$, puis convexe sur $[2;+\infty[$. Son point d'inflexion est $\boxed{(2;2e^{-2})}$.

6

Question 6. a.

Sujet p. 3

> Soit a un réel appartenant à [0 ; +∞[et A le point de la courbe C_f d'abscisse a. On note T_a la tangente à C_f en A. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est y = ((1 − a)e⁻ᵃ)x + a²e⁻ᵃ.

Le point de tangence est $A(a; f(a)) = (a; ae^{-a})$, et le coefficient directeur de la tangente en ce point est $f'(a) = (1-a)e^{-a}$. Une équation de la tangente est donc $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. En développant,

$$y = (1-a)e^{-a}x - a(1-a)e^{-a} + ae^{-a} = (1-a)e^{-a}x + a^2e^{-a}.$$

RÉPONSE À RETENIR

Une équation réduite de T_a est $\boxed{y = (1-a)e^{-a}x + a^2e^{-a}}$.

Question 6. b.

Sujet p. 3

> On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées, et g(a) l'ordonnée de H_a. En déduire l'expression de g(a).

Le point H_a appartient à l'axe des ordonnées, donc son abscisse est 0. En posant $x = 0$ dans l'équation de T_a, on obtient pour son ordonnée le terme constant a^2e^{-a}. Par définition, cette ordonnée est $g(a)$.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $a \in [0; +\infty[$, $\boxed{g(a) = a^2e^{-a}}$.

Question 6. c.

Sujet p. 3

> Démontrer que g(a) est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe C_f.

Pour $a \geq 0$, dérivons l'expression de g obtenue à la question précédente :

$$g'(a) = 2ae^{-a} - a^2e^{-a} = a(2-a)e^{-a}.$$

Comme $e^{-a} > 0$ et $a \geq 0$, cette dérivée est positive pour $0 < a < 2$, nulle pour $a = 0$ et $a = 2$, puis négative pour $a > 2$. Ainsi, g croît sur $[0; 2]$, puis décroît sur $[2; +\infty[$: son maximum est atteint pour $a = 2$, et vaut $g(2) = 4e^{-2}$.

D'après la question 5, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour abscisse 2. Ainsi, A est ce point d'inflexion lorsque $a = 2$, précisément la valeur pour laquelle $g(a)$ est maximale.

RÉPONSE À RETENIR

g atteint son maximum pour $a = 2$, avec $\boxed{g(2) = 4e^{-2}}$. À cette valeur, $A = (2; 2e^{-2})$ est le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3

5 points

Suite définie par récurrence et transformation en suite arithmétique

Question 1.

Sujet p. 4

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (-u_n - 4)/(u_n + 3)$. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

On applique la relation de récurrence. Comme $u_0 = 0$, on obtient :

$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{-4}{3}.$$

Puis :

$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \frac{\frac{4}{3} - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}.$$

RÉPONSE À RETENIR

$$\boxed{u_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad u_2 = -\frac{8}{5}}.$$

Question 2.

Sujet p. 4

Pour la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (-u_n - 4)/(u_n + 3)$, on considère la fonction terme ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python : def terme(n):, u = ..., for i in range(n):, u = ..., return(u). On rappelle qu'en langage Python, « i in range(n) » signifie que i varie de 0 à n − 1. Recopier et compléter le cadre de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction terme(n) renvoie la valeur de u_n.

On initialise la variable u à $u_0 = 0$. À chaque passage dans la boucle, on remplace sa valeur par $\dfrac{-u - 4}{u + 3}$, c'est-à-dire par le terme suivant de la suite. La boucle est exécutée n fois, donc la valeur renvoyée suit la récurrence jusqu'à u_n.

```
def terme(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = (-u - 4) / (u + 3)
    return u
```

En Python, les divisions sont effectuées en nombres flottants : les valeurs renvoyées sont donc des approximations machine des termes lorsque ceux-ci ne sont pas représentables exactement.

RÉPONSE À RETENIR

Le programme complété renvoie numériquement u_n pour tout entier naturel n.

Question 3.

Sujet p. 4

Soit la fonction f définie sur]−3 ; +∞[par f(x) = (−x − 4)/(x + 3). Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur]−3 ; +∞[.

Pour $x \in]-3; +\infty[$, on a $x + 3 > 0$, donc le dénominateur de la dérivée ne s'annule pas. Par dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{-(x+3)-(-x-4)}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}.$$

Cette dérivée est strictement positive sur $]-3;+\infty[$. Ainsi, f est strictement croissante sur cet intervalle.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-3;+\infty[}$.

Question 4.

Sujet p. 4

Pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (-u_n - 4)/(u_n + 3)$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

Posons P_n : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : d'après la question 1, $u_1 = -\frac{4}{3}$ et $u_0 = 0$. Ainsi, $-2 < -\frac{4}{3} \leq 0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons P_n vraie. Alors $-2 < u_{n+1} \leq u_n$, donc u_{n+1} et u_n appartiennent à $]-3;+\infty[$. Comme f y est strictement croissante,

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$

De plus, $u_{n+1} > -2$ et f est strictement croissante ; or $f(-2) = -2$. Par conséquent, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(-2) = -2$. On a donc $-2 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$, ce qui prouve P_{n+1}.

Par récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier naturel n, $\boxed{-2 < u_{n+1} \leq u_n}$.

Question 5.

Sujet p. 4

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n : la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par -2 : pour $n \geq 1$, la question précédente donne $u_n > -2$, et $u_0 = 0 > -2$. Une suite décroissante et minorée est convergente.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

6

Question 6. a.

Sujet p. 4

Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 1/(u_n + 2)$. Donner v_0.

On utilise $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$ et $u_0 = 0$:

$$v_0 = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{v_0 = \dfrac{1}{2}}$.

Question 6. b.

Sujet p. 4

Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

La question 4 établit que $u_n > -2$ pour $n \geq 1$, et c'est également vrai pour $u_0 = 0$. Les dénominateurs utilisés ci-dessous sont donc non nuls. À partir de la relation de récurrence, on calcule :

$$u_{n+1} + 2 = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2 = \frac{u_n + 2}{u_n + 3}.$$

Il vient alors :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{u_n + 3}{u_n + 2} = 1 + \frac{1}{u_n + 2} = v_n + 1.$$

La différence entre deux termes consécutifs est donc constante et égale à 1.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{(v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } 1}$.

Question 6. c.

Sujet p. 4

En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n = 1/(n + 0,5) − 2.

Une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$ vérifie, pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 + n = \frac{1}{2} + n.$$

Comme $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$, on en déduit $u_n + 2 = \dfrac{1}{n + \frac{1}{2}}$, puis

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n + 0,5} - 2}$.

Question 6. d.

Sujet p. 4

Déterminer la limite de la suite (u_n).

D'après l'expression obtenue à la question précédente, $u_n = \dfrac{1}{n + 0,5} - 2$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n + 0,5}$ tend vers 0. Par conséquent, u_n tend vers -2.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2}$.

Exercice 4

5 points

QCM : probabilités conditionnelles, pannes indépendantes et répétition de lancers

1

Question 1. a.

Sujet p. 5

> Les 200 adhérents d'un club se répartissent entre filles et garçons, et pratiquent l'aviron ou le basket selon le tableau de la page 5. On choisit un adhérent au hasard. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de F sachant A est proposée comme : 25/100.

La probabilité conditionnelle se calcule parmi les adhérents qui pratiquent l'aviron. Ils sont 75, dont 25 filles : $P(F \mid A) = \dfrac{25}{75} = \dfrac{1}{3}$. La proposition a, $\dfrac{25}{100}$, est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **b** : $\dfrac{25}{75}$.

Question 1. b.

Sujet p. 5

> Les 200 adhérents d'un club se répartissent entre filles et garçons, et pratiquent l'aviron ou le basket selon le tableau de la page 5. On choisit un adhérent au hasard. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de F sachant A est proposée comme : 25/75.

Parmi les 75 adhérents qui pratiquent l'aviron, 25 sont des filles. Ainsi, $P(F \mid A) = \dfrac{25}{75} = \dfrac{1}{3}$. La proposition b correspond à cette probabilité conditionnelle.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **b** : $\dfrac{25}{75} = \dfrac{1}{3}$.

Question 1. c.

Sujet p. 5

> Les 200 adhérents d'un club se répartissent entre filles et garçons, et pratiquent l'aviron ou le basket selon le tableau de la page 5. On choisit un adhérent au hasard. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de F sachant A est proposée comme : 25/105.

Pour calculer $P(F \mid A)$, le dénominateur est l'effectif total des pratiquants de l'aviron, soit 75, et non l'effectif total des filles, 105. On obtient $P(F \mid A) = \dfrac{25}{75} = \dfrac{1}{3}$. La proposition c est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **b** : $\dfrac{25}{75}$.

Question 1. d.

Sujet p. 5

> Les 200 adhérents d'un club se répartissent entre filles et garçons, et pratiquent l'aviron ou le basket selon le tableau de la page 5. On choisit un adhérent au hasard. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A

> l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de F sachant A est proposée comme : 75/105.

Les 75 pratiquants de l'aviron comprennent 25 filles. La probabilité conditionnelle vaut donc $P(F \mid A) = \frac{25}{75}$, et non $\frac{75}{105}$.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **b** : $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$.

2

Question 2. a.

Sujet p. 5

> On choisit un adhérent au hasard parmi les 200 adhérents du club répartis selon le tableau de la page 5. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de l'événement A ∪ F est proposée comme : 9/10.

On additionne les effectifs des filles et des pratiquants de l'aviron, puis on soustrait les filles qui pratiquent l'aviron, comptées deux fois : $105 + 75 - 25 = 155$. Ainsi, $P(A \cup F) = \frac{155}{200} = \frac{31}{40}$. La proposition a, $\frac{9}{10}$, est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **c** : $\frac{31}{40}$.

Question 2. b.

Sujet p. 5

> On choisit un adhérent au hasard parmi les 200 adhérents du club répartis selon le tableau de la page 5. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de l'événement A ∪ F est proposée comme : 1/8.

L'effectif de $A \cup F$ est $75 + 105 - 25 = 155$: on retire les 25 filles pratiquant l'aviron, comptées dans les deux effectifs. La probabilité vaut donc $\frac{155}{200} = \frac{31}{40}$. La proposition b est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **c** : $\frac{31}{40}$.

Question 2. c.

Sujet p. 5

> On choisit un adhérent au hasard parmi les 200 adhérents du club répartis selon le tableau de la page 5. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de l'événement A ∪ F est proposée comme : 31/40.

Les effectifs de A et F sont respectivement 75 et 105, et leur intersection compte 25 adhérents. La formule de l'union donne $P(A \cup F) = \frac{75 + 105 - 25}{200} = \frac{155}{200} = \frac{31}{40}$. La proposition c est exacte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **c** : $\frac{31}{40}$.

Question 2. d.

Sujet p. 5

On choisit un adhérent au hasard parmi les 200 adhérents du club répartis selon le tableau de la page 5. F désigne l'événement « l'adhérent est une fille » et A l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ». La probabilité de l'événement A ∪ F est proposée comme : 5/36.

Les adhérents de $A \cup F$ sont les 75 pratiquants de l'aviron et les 105 filles, en retirant les 25 adhérents communs aux deux groupes. Donc $P(A \cup F) = \frac{75 + 105 - 25}{200} = \frac{31}{40}$. La proposition d est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **c** : $\frac{31}{40}$.

3

Question 3. a.

Sujet p. 5

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_1 que le bus ou le train soit en panne est proposée comme : $p_1 = bt$.

Notons « bus en panne » et « train en panne » les deux événements. Ils sont indépendants, donc la probabilité des deux pannes simultanées est bt. Par la formule de l'union, la probabilité qu'au moins l'un des deux soit en panne est $b + t - bt$. La proposition a est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **d** : $p_1 = b + t - bt$.

Question 3. b.

Sujet p. 5

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_1 que le bus ou le train soit en panne est proposée comme : $p_1 = 1 - bt$.

La probabilité que le bus et le train soient tous deux en panne est bt, par indépendance. La probabilité qu'au moins l'un soit en panne est donc le complément de « aucun n'est en panne » : $1 - (1 - b)(1 - t) = b + t - bt$. La proposition b est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **d** : $p_1 = b + t - bt$.

Question 3. c.

Sujet p. 5

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_1 que

> le bus ou le train soit en panne est proposée comme : p_1 = b + t.

La somme $b + t$ compte deux fois la situation où les deux transports sont en panne. Cette situation a pour probabilité bt, par indépendance. Il faut donc la retrancher : $p_1 = b + t - bt$. La proposition c est incorrecte.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La bonne réponse est **d** : $p_1 = b + t - bt$.

Question 3. d.

Sujet p. 5

> Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_1 que le bus ou le train soit en panne est proposée comme : p_1 = b + t − bt.

Par la formule de l'union, la probabilité qu'au moins l'un des transports soit en panne vaut $b + t - P(\text{les deux en panne})$. Comme les pannes sont indépendantes, $P(\text{les deux en panne}) = bt$. Ainsi, $p_1 = b + t - bt$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La bonne réponse est **d** : $p_1 = b + t - bt$.

4

Question 4. a.

Sujet p. 5

> Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_2 qu'Albert puisse se rendre à son travail est proposée comme : p_2 = bt.

Albert peut se rendre au travail si au moins l'un des deux transports fonctionne. L'événement contraire est que le bus et le train soient tous deux en panne. Par indépendance, la probabilité de ces deux pannes est bt, donc $p_2 = 1 - bt$. La proposition a correspond à la probabilité des deux pannes, et non à celle de pouvoir se rendre au travail.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La bonne réponse est **b** : $p_2 = 1 - bt$.

Question 4. b.

Sujet p. 5

> Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_2 qu'Albert puisse se rendre à son travail est proposée comme : p_2 = 1 − bt.

Ne pas pouvoir se rendre au travail signifie que les deux moyens de transport sont en panne. Par indépendance, la probabilité de cette situation est bt. L'événement contraire, pouvoir prendre au moins un transport, a donc pour probabilité $p_2 = 1 - bt$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La bonne réponse est **b** : $p_2 = 1 - bt$.

Question 4. c.

Sujet p. 5

> Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_2 qu'Albert puisse se rendre à son travail est proposée comme : $p_2 = b + t$.

La probabilité qu'Albert puisse se déplacer est le complément de la probabilité que les deux transports soient en panne. Par indépendance, cette dernière vaut bt, d'où $p_2 = 1 - bt$. La proposition c est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **b** : $p_2 = 1 - bt$.

Question 4. d.

Sujet p. 5

> Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est b, celle que le train soit en panne est t, et les pannes surviennent de façon indépendante. La probabilité p_2 qu'Albert puisse se rendre à son travail est proposée comme : $p_2 = b + t - bt$.

La formule $b + t - bt$ donne la probabilité qu'au moins l'un des transports soit en panne. Albert peut se rendre au travail si au moins l'un fonctionne, c'est-à-dire si les deux ne sont pas simultanément en panne. Ainsi, $p_2 = 1 - bt$, et la proposition d est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **b** : $p_2 = 1 - bt$.

5

Question 5. a.

Sujet p. 5

> On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x. On lance la pièce n fois ; les lancers sont indépendants. La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est proposée comme : $p = x^n$.

La probabilité x^n correspond à obtenir FACE à chacun des n lancers, puisque les lancers sont indépendants. Ici, on cherche au moins un FACE : on prend le complément de l'événement « aucun FACE ». La proposition a est donc incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **d** : $p = 1 - (1 - x)^n$.

Question 5. b.

Sujet p. 5

> On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x. On lance la pièce n fois ; les lancers sont indépendants. La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est proposée comme : $p = (1 - x)^n$.

La probabilité $(1 - x)^n$ correspond à l'événement « aucun FACE en n lancers », car la probabilité de ne pas obtenir FACE à un lancer est $1 - x$. Pour obtenir au moins un FACE, on prend le complément : $p = 1 - (1 - x)^n$. La proposition b donne donc la probabilité de l'événement contraire.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **d** : $p = 1 - (1 - x)^n$.

Question 5. c.

Sujet p. 5

> On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x. On lance la pièce n fois ; les lancers sont indépendants. La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est proposée comme : p = 1 − x^n.

L'événement contraire à « au moins un FACE » est « aucun FACE », de probabilité $(1 - x)^n$ par indépendance des lancers. La probabilité cherchée est donc $1 - (1 - x)^n$, et non $1 - x^n$. La proposition c est incorrecte.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **d** : $p = 1 - (1 - x)^n$.

Question 5. d.

Sujet p. 5

> On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x. On lance la pièce n fois ; les lancers sont indépendants. La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est proposée comme : p = 1 − $(1 - x)^n$.

À chaque lancer, la probabilité de ne pas obtenir FACE est $1 - x$. Par indépendance, la probabilité de n'obtenir aucun FACE en n lancers est $(1 - x)^n$. En prenant le complément, on obtient $p = 1 - (1 - x)^n$.

RÉPONSE À RETENIR

La bonne réponse est **d** : $p = 1 - (1 - x)^n$.

Sujet : https://www.sujetdebac.fr/annales-pdf/2023/spe-mathematiques-2023-nouv-caledonie-2-sujet-officiel.pdf
© FormaV EI • Proposition de correction, distincte d'un corrigé officiel.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.