Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

CORRECTION DU BAC – MATHEMATIQUES 2023 – AMERIQUE DU NORD JOUR 2

Exercice 1 : Fonctions

Partie A :

1. Il semble que la fonction dérivée de f soit positive sur $]-\infty\,;0{,}4]$ et sur $[2{,}6\,;+\infty[$ et négative sur $[0{,}4\,;2{,}6]$. **La fonction f serait donc croissante sur $]-\infty\,;\mathbf{0,4}]$ et sur $[\mathbf{2,6}\,;+\infty[$ et décroissante $[\mathbf{0,4}\,;\mathbf{2,6}]$.**

2. Il semble que la fonction f' soit croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[2\,;+\infty[$ et sur $[-1\,;2]$. **Ainsi, la fonction f serait convexe sur $]-\infty\,;-\mathbf{1}]$ et sur $[\mathbf{2}\,;+\infty[$.**

Partie B :

1. **a.** En $+\infty$, forme indéterminée.
   Pour tout réel x, $f(x)=\left(x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)\right)e^x$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

   b. En $-\infty$, forme indéterminée.
   Pour tout réel x, $f(x)=x^2e^x-5xe^x+6e^x$
   $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ (croissance comparée) ; $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ (croissance comparée) donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5xe^x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}6e^x=0$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x,
   $\boldsymbol{f'(x)=(2x-5)e^x+(x^2-5x+6)e^x=(x^2+2x-5x-5+6)e^x=(x^2-3x+1)e^x}$

3. Pour tout réel x, $e^x>0$ donc la fonction f' est du signe de x^2-3x+1 sur $\mathbb{R}$.
   $x\mapsto x^2-3x+1$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a=1$; $b=-3$ et $c=1$
   Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times1=5$
   $\Delta>0$ donc 2 racines.
   $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
   Donc, x^2-3x+1 est du signe de a, soit positif, à l'extérieur des racines.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Signe de x^2-3x+1		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	
Signe de $f'(x)$		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	
Variations de f	**0**	↗	$(\sqrt{5}-2)e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	↘	$(\sqrt{5}+2)e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	↗	$+\infty$

4. Equation de (T) : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ $\quad y=f'(0)x+f(0)$
$f'(0)=(0^2-3\times 0+1)e^0=1\times 1=1$
$f(0)=(0^2-5\times 0+6)e^0=6\times 1=6$
Donc, (T) a pour équation : $y=1x+6$ $\quad \boldsymbol{y=x+6}$

5. **a.** Pour tout réel x, $e^x>0$ donc f'' est du signe de $(x+1)(x-2)$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ et $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.
On a donc :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $x+1$		-	0		+		
Signe de $x-2$		-			0	+	
Signe de $(x+1)(x-2)$		+	0	-	0	+	
Signe de $f''(x)$		+	0	-	0	+	

La fonction f'' est positive sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[2\,;+\infty[$ donc $\boldsymbol{f}$ **est convexe sur** $]-\infty\,;\,\boldsymbol{-1}]$ **et sur** $[\boldsymbol{2}\,;+\infty[$**.**
La fonction f'' est négative sur $[-1\,;2]$ donc $\boldsymbol{f}$ **est concave sur** $[\boldsymbol{-1}\,;\boldsymbol{2}]$**.**

b. La fonction f est concave sur $[-1\,;2]$ donc la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier de (T).
Ainsi, pour tout $x\in[-1\,;2]$, $\boldsymbol{f(x)\leq x+6}$.

Exercice 2 : Suites

1. On sait qu'entre 2023 et 2024, 15% des sportifs du club A rejoignent le club B, le nombre de sportifs du club A baisse donc de 15%, il est donc multiplié par 0,85. De plus, 10% des sportifs du club B rejoignent le club A, le nombre de sportifs du club B baisse donc de 10%, il est donc multiplié par 0,9.
Ainsi, on calcule comme cela a_1 et b_1 qui sont respectivement le nombre de sportifs du club A et B en 2024.
$a_1 = 0{,}85a_0 + 0{,}1b_0 = 0{,}85 \times 1700 + 0{,}1 \times 1300 = 1575.$
$b_1 = 0{,}9b_0 + 0{,}15a_0 = 0{,}9 \times 1300 + 0{,}15 \times 1700 = 1425.$
Ainsi, en 2024, il y aura 1575 sportifs au club A et 1425 sportifs au club B.

2. On sait qu'aucun sportif ne quitte le groupe de 3000 sportifs pendant l'étude. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a_n + b_n = 3000.}$

3. Chaque année, le phénomène décrit en question 1 se reproduit.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}1b_n = 0{,}75\ a_n + 0{,}1a_n + 0{,}1b_n = 0{,}75a_n + 0{,}1(a_n + b_n)$
$\boldsymbol{a_{n+1} = 0{,}75a_n + 0{,}1 \times 3000 = 0{,}75a_n + 300.}$

4. **a.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$

Initialisation : $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ or $1200 \leq 1575 \leq 1700 \leq 1700$ donc $1200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1700$ La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pout un entier naturel k, $1200 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1700$ et montrons qu'alors $1200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1700$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $1200 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1700$
On multiplie par 0,75 > 0 : $900 \leq 0{,}75a_{k+1} \leq 0{,}75a_k \leq 1275.$
On ajoute 300 : $1200 \leq 0{,}75a_{k+1} + 300 \leq 0{,}75a_k + 300 \leq 1575$
Or par définition, $0{,}75a_{k+1} + 300 = a_{k+2}$; $0{,}75a_k + 300 = a_{k+1}$ et $1575 \leq 1700$
On a donc : $1200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1575 \leq 1700$
Soit : $1200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1700$ La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700.}$

b. Pour tout entier naturel n, $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n$, donc, la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1200, donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite $(\boldsymbol{a_n})$ est convergente vers $\boldsymbol{l \geq 1200.}$**

5. a. Pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = a_{n+1} - 1200 = 0{,}75a_n + 300 - 1200 = 0{,}75a_n + 900 = 0{,}75(a_n - 1200) = 0{,}75v_n$.
Donc, **la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $\boldsymbol{v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500}$**

b. Donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ $\quad \boldsymbol{v_n = 500 \times 0{,}75^n}$**.**

c. Pour tout entier naturel $n, v_n = a_n - 1200 \Leftrightarrow a_n = v_n + 1200$
Donc, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200}$**.**

6. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n$ car 0 < 0,75 < 1 donc par produit et par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1200}$**.**

b. Ainsi, **à long terme, le nombre de sportifs présents au club A va se stabiliser autour de 1200.**

7. a. Ligne 4 : while A >= 1280 : Ligne 6 : A = 0,75*A + 300 Ligne 7 : n

b. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $a_n < 1280$
$\Leftrightarrow 500 \times 0{,}75^n + 1200 < 1280 \Leftrightarrow 500 \times 0{,}75^n < 80 \Leftrightarrow 0{,}75^n < 0{,}16$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}75^n) < \ln 0{,}16$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
$\Leftrightarrow n \ln 0{,}75 < \ln 0{,}16 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}16}{\ln 0{,}75}$ car $0{,}75 < 1$ donc $\ln 0{,}75 < \ln 1$ soit $\ln 0{,}75 < 0$
Or, $\frac{\ln 0{,}16}{\ln 0{,}75} \approx 6{,}37$ donc $n \geq 7$. Ainsi, le plus petit entier naturel n tel que $a_n < 1280$ est 7. **Donc, l'appel de la fonction seuil renvoie 7.**

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

1. a. $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E\,;y_F - y_E\,;z_F - z_E)$ $\quad$ $\boldsymbol{\overrightarrow{EF}(-4\,;4\,;2)}$

$\overrightarrow{FG}(x_G - x_F\,;y_G - y_F\,;z_G - z_F)$ $\quad$ $\boldsymbol{\overrightarrow{FG}(4\,;0\,;-4)}$

b. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc **les points E, F et G ne sont pas alignés**.

2. a. La droite (FG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}(4\,;0\,;-4)$ et passe par $F(-1\,;2\,;1)$ donc la droite (FG) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} \boldsymbol{x = 4t - 1} \\ \boldsymbol{y = 2} \\ \boldsymbol{z = 1 - 4t} \end{cases}$ $\boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$

b. Il faut montrer que le point H appartient à la droite (FG) et que les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux (car $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur directeur de la droite (FG).)
Le point H appartient à la droite (FG) si, et seulement si il existe un réel t tel que :
$\begin{cases} x_H = 4t - 1 \\ y_H = 2 \\ z_H = 1 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4t - 1 \\ 2 = 2 \\ -2 = 1 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0{,}75 \\ 2 = 2 \\ t = 0{,}75 \end{cases}$ donc t existe donc le point H appartient à la droite (FG).
De plus, $\overrightarrow{HE}(x_E - x_H\,;y_E - y_H\,;z_E - z_H)$ $\quad$ $\overrightarrow{HE}(1\,;-4\,;1)$
Donc, $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{FG} = 1 \times 4 + (-4) \times 0 + 1 \times (-4) = 4 + 0 - 4 = 0$
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux donc **le point H est bien le projeté orthogonal du point E sur la droite (FG).**

c. Le point H est le projeté orthogonal du point E sur la droite (FG) donc $[EH]$ est la hauteur du triangle EFG relative à la base $[FG]$.
Donc, $A_{EFG} = \frac{HE \times FG}{2}$
$HE = \left|\left|\overrightarrow{HE}\right|\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}.$
$FG = \left|\left|\overrightarrow{FG}\right|\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$
Donc, $\boldsymbol{A_{EFG} = \frac{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 12cm^2}$.

3. a. $\vec{n}.\overrightarrow{FG} = 2 \times 4 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 8 + 0 - 8 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.
$\vec{n}.\overrightarrow{EF} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times 2 = -8 + 4 + 4 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.
Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (EFG), donc **le vecteur $\boldsymbol{\vec{n}}$ est normal au plan (EFG).**

b. Le plan (EFG) a pour vecteur directeur $\vec{n}(2\,;1\,;2)$. Le plan (EFG) a donc pour équation cartésienne $2x + y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, $F(-1\,;2\,;1) \in (EFG)$ donc $2x_F + y_F + 2z_F + d = 0 \Leftrightarrow 2 \times (-1) + 2 + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$.
Donc, **le plan $(\boldsymbol{EFG})$ a pour équation cartésienne $\boldsymbol{2x + y + 2z - 2 = 0}$**

c. La droite (d) est orthogonale au plan (EFG) donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (EFG). $\vec{n}$ est donc un vecteur directeur de la droite (d) qui passe par le point $D(3\,;1\,;5)$. La droite (d) a donc pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 + t} \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{z = 5 + 2t} \end{cases}$$

d. Le point K est le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG), donc il s'agit du point d'intersection de la droite (d) et du plan (EFG). Ses coordonnées vérifient donc :
$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 2(3 + 2t) + 1 + t + 2(5 + 2t) - 2 = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 + 9t = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} t = -\frac{5}{3} \\ x = 3 + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{-1}{3} \\ y = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \\ z = 5 + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{donc } \boldsymbol{K\left(-\frac{1}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\frac{5}{3}\right)}.$$

4. a. $\overrightarrow{DK}(x_K - x_D\,;y_K - y_D\,;z_K - z_D)$ $\quad$ $\overrightarrow{DK}\left(-\frac{10}{3};-\frac{5}{3};-\frac{10}{3}\right)$
Donc, $\boldsymbol{DK = \left|\left|\overrightarrow{DK}\right|\right| = \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{9}} = \frac{15}{3} = 5cm}$.

b. Le point K est le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG) donc $[DK]$ est la hauteur du tétraèdre $DEFG$ relative à la base EFG.
Donc, $\boldsymbol{V_{DEFG} = \frac{1}{3} \times A_{EFG} \times DK = \frac{1}{3} \times 12 \times 5 = 20\ cm^3}$.

<u>Exercice 4 :</u> QCM sur les fonctions, les suites et les probabilités

1. En $+\infty$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ donc par produit et par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée) donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Réponse b.

2. La fonction h est continue sur $[-2\,;4]$ et en particulier sur $[1\,;3]$,
$h(1) = 4\,; h(3) = -1$ et $4 > 1 > -1$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $a \in [1\,;3]$ tel que $h(a) = 1$.

Réponse c.

3. On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Ainsi, la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge. **Réponse b.**

4. On note Y la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur. Y prend les valeurs : 8 ; -1 ; -4
Comme le dé est équilibré, on a : $P(Y=8) = \frac{1}{6}$; $P(Y=-1) = \frac{1}{2}$ (3 nombres pairs parmi 6 nombres) et $P(Y=-4) = \frac{1}{3}$ (il ne reste que 2 nombres possibles parmi 6).
On peut donc calculer l'espérance de Y.
$E(Y) = 8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{2} + (-4) \times \frac{1}{3} = -0{,}5€$. Ainsi, en moyenne, le joueur perd 0,5€. **Réponse d.**

5. $P(X=0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3$ donc $\binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow (1-p)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow 1-p = \frac{1}{5} \Leftrightarrow p = \frac{4}{5}$. **Réponse c.**

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.