Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Centres étrangers[1] 21 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2$$

1. • On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = 2\ln x + x - 2$, d'où :

$g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1$. On a par composition de la dérivation :

$g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{2+x}{x}$.

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $2 + x$.

Or $x > 0 \implies 2 + x > 2 > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction g est donc croissante et d'après la question précédente de moins l'infini à plus l'infini.

3. **a.** D'après la question précédente g est continue car dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et croit de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne :

$g(1) = -1$ et $g(2) \approx 1,4$, donc $1 < \alpha < 2$;

$g(1,3) \approx -0,175$ et $g(1,4) \approx 0,07$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$;

$g(1,37) \approx -0,0004$ et $g(1,38) \approx 0,02$, donc $1,37 < \alpha < 1,38$

4. D'où le tableau de signe :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x)$$

1. **a.** On a successivement :

$\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, d'où par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-2)}{x} = -\infty$;

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

1. Europe

b. Géométriquement le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. • On a $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x} = 1-\frac{2}{x}$

De $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, il suit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x} = 1$.

• D'autre part on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Donc par produit de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a par dérivation du produit :

$$f'(x) = \frac{1\times x - 1\times(x-2)}{x^2}\ln x + \frac{x-2}{x}\times\frac{1}{x} = \frac{x-x+2}{x^2}\ln x + \frac{x-2}{x^2} = \frac{2\ln x + x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

4. Comme $x^2 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle est celui de $g(x)$.

On a vu à la question A. 4. que :

- :sur l'intervalle $]0\,;\,\alpha[$, $g(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]0\,;\,\alpha[$;
- :sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]\alpha\,;\,\infty[$.

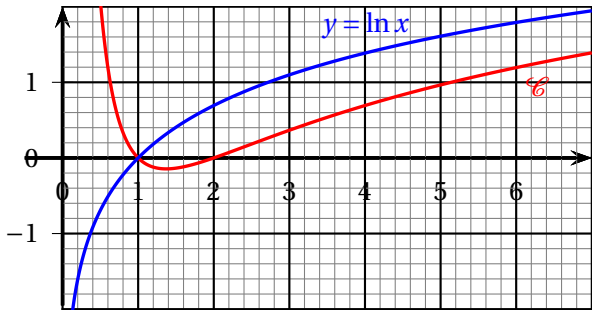
Partie C

$$d(x) = f(x) - \ln x = \frac{(x-2)}{x}\ln(x) - \ln x = \ln x\left[\frac{(x-2)}{x} - 1\right] = \ln x\left[\frac{x-2-x}{x}\right] = \frac{-2}{x}\ln x.$$

La position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln est donnée par le signe de la fonction d.
Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui du produit $-2\ln x$.
On dresse donc un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
-2	‖	$-$		$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$-2\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe logarithme népérien et, sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la courbe logarithme népérien.



EXERCICE 2 **5 points**

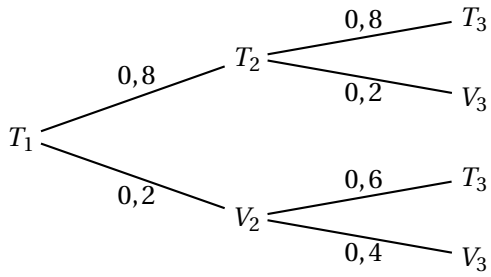
S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n-ième jour »
- V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n-ième jour »
- On note p_n la probabilité de l'évènement T_n,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

1. 2e et 3e jours,



2. Calculer p_3

D'après la loi des probabilités totales : $p_3 = p(T_2 \cap T_3) + p(V_2 \cap T_3)$.

$p(T_2 \cap T_3) = p(T_2) \times p_{T_2}(T_3) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$. De même :

$p(V_2 \cap T_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(T_3) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$.

Donc $p_3 = 0,64 + 0,12 = 0,76$.

3. Le 3e jour, M. Durand utilise son vélo.

Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

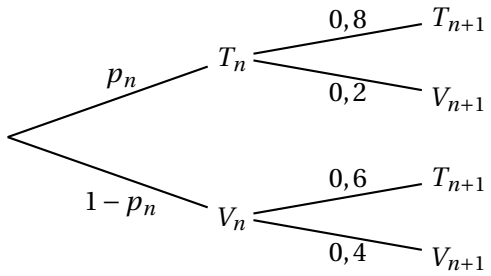
On calcule $p_{V_3}(T_2) = \dfrac{p(V_3 \cap T_2)}{p(V_3)} = \dfrac{p(T_2 \cap V_3)}{p(V_3)}$.

Or $p(V_3) = 1 - p_3 = 1 - 0,76 = 0,24$ et

$p(T_2 \cap V_3) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$, d'où

$p_{V_3}(T_2) = \dfrac{0,16}{0,24} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

On a $p_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(V_n \cap T_{n+1}) = 0,8p_n + 0,6\left(1 - p_n\right) = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a $p_1 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{1-1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^0 = 0,72 + 0,25 = 1$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

Alors d'après la question **5.** $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$, d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$p_{n+1} = 0,2\left(0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}\right) + 0,6 = 0,15 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$: l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1 elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,25 \times 0,2^{n-1} = 0$ et par somme de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,75 = \dfrac{3}{4}$.

Au bout d'un certain nombre de jours Monsieur Durand prendra les transports en commun 3 jours sur 4.

EXERCICE 3 — 5 points

1. Une primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, est la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par :
Avec $F(x) = (x-1)e^x$, on a $F'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$. Réponse **b.**

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$.

La fonction est définie quand l'argument du logarithme est supérieur à zéro donc quand $\dfrac{x-1}{2x+4} > 0$ ou ce qui revient au même quand $(x-1)(2x+4) = 0$.
Or ce trinôme du second degré a deux zéros -2 et 1 et son coefficient dominant est $+2$, donc ce trinôme est positif sauf entre les racines -2 et 1. Réponse **c.**

3. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^x$ est :

On peut calculer $h'(x) = (x+2)e^x$, puis $h''(x) = (x+3)e^x$.

Comme $e^x > 0$ quel que soit le réel x le signe de $h''(x)$ est celui de $x+3$ qui est positif sur $]-3\,;\,+\infty[$. Sur cet intervalle la fonction est convexe. Réponse **d.**

4. Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ.

La limite est supérieure ou égale à 3. Réponse **b.**

5. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1} = \dfrac{1}{n}w_n$. On peut démontrer rapidement par récurrence de :

$w_1 = 2, \quad w_2 = \dfrac{2}{1} = 2, \quad w_3 = 1, \quad w_4 = \dfrac{1}{3}w_3 = \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{2\times 3} = \dfrac{2}{(4-1)!}$, ...

que $w_n = \dfrac{2}{(n-1)!}$, avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{(n-1)!} = 0$. Réponse **d.**

EXERCICE 4 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1\,;\,-3\,;\,2),\qquad B(3\,;\,-2\,;\,6)\quad\text{et}\quad C(1\,;\,2\,;\,-4).$$

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan $\mathscr{P}$.

2. **a.** On a :
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times 13+1\times(-16)+4\times(-9) = 52-16-36 = 52-52 = 0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 13+5\times(-13)+(-6\times(-9) = 26-65+54 = 52-52 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$: il est normal à ce plan.

b. On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P}\iff ax+by+cz+d=0$ et que a, b et c sont les composantes d'un vecteur normal à ce plan donc par exemple $\vec{n}$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P}\iff 13x-16y-9z+d=0$.

par exemple $C(1\,;\,2\,;\,-4)\in\mathscr{P}\iff 13\times 1+2\times(-16)-9\times(-4)+d=0+d=0\iff 13-32+36+d=0\iff 17+d=0\iff d=-17$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P}\iff 13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $F(15\,;\,-16\,;\,-8)$ et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. La droite $\mathscr{D}$ étant orthogonale au plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathscr{P}$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D}\iff \overrightarrow{FM} = t\vec{n}$, $t\in\mathbb{R}$, soit $\begin{cases} x-15 &= 13t\\ y+16 &= -16t\\ z+8 &= -9t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

4. Si $E(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et au plan $\mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient les équations de la droite et celle du plan donc le système :

$$\begin{cases} x-15 &= 13t\\ y+16 &= -16t\\ z+8 &= -9t\\ 13x-16y-9z-17 &= 0\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans l'équation du plan, on obtient :

$13(13t+15)-16(16t-16)-9(-9t-8)-17=0\iff 169t+195+256t+256+81t+72-17=0\iff 506t+506=0\iff t=-1$.

En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, on obtient :

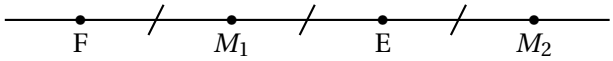
$$\begin{cases} x-15 &= -13\\ y+16 &= 16\\ z+8 &= 9\end{cases}\iff\begin{cases} x &= 2\\ y &= 0\\ z &= 1\end{cases}$$

Donc $E(2\,;\,0\,;\,1)$.

5. F et E appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, donc la distance du point F au plan est égale à FE.

Or $\text{FE}^2 = (-13)^2 + 16^2 + 9^2 = 169 + 256 + 81 = 506$. D'où $\text{FE} = \sqrt{506}$.

6. Comme précédemment si $M \in \mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ la distance de ce point au plan $\mathscr{P}$ est ME.



- Premier point répondant à la question : M_1 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$, on déduit que $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_1}\begin{pmatrix}6,5\\-8\\-4,5\end{pmatrix}$, soit

$$\begin{cases} x_1 - 2 = 6,5 \\ y_1 - 0 = -8 \\ z - 1 = -4,5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 8,5 \\ y_1 = -8 \\ z = -3,5 \end{cases}$$

- Deuxième point répondant à la question : M_2 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_2} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$, on déduit que $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_2}\begin{pmatrix}-6,5\\8\\4,5\end{pmatrix}$, soit

$$\begin{cases} x_2 - 2 = -6,5 \\ y_2 - 0 = 8 \\ z_2 - 1 = 4,5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -4,5 \\ y_2 = 8 \\ z_2 = 5,5 \end{cases}$$

Donc $M_1(8,5\ ;\ -8\ ;\ -3,5)$ et $M_2(-4,5\ ;\ 8\ ;\ 5,5)$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.