Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 14 mars 2023 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 5 points

Pour ce QCM, aucune justification n'est demandée. On en fournit quand même dans ce corrigé.

1. **Réponse B.**

   F est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

   F est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$

   On a donc, pour tout réel x, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$

   $F = u' \times v + v' \times u$ donc, pour tout réel x, $F'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x = f(x)$.

   Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. **Réponse D.**

   Par lecture graphique : $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

   D'après l'énoncé : le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 donc $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3\,;\,+\infty[$.

   D'après l'énoncé : le point d'abscisse 5 est le seul point d'inflexion, de plus, par lecture graphique, la fonction est concave puis convexe donc : $f''(x) < 0$ sur $]0\,;\,5[$ et $f''(x) > 0$ sur $]5\,;\,+\infty[$.

   Pour tout $x \in]5\,;\,+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

3. **Réponse D.**

   Pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-t}}$.

   D'une part $g(0) = \dfrac{a}{b+\mathrm{e}^0} = \dfrac{a}{b+1} = 2$ donc $\dfrac{a}{b+1} = 2 \iff a = 2(b+1) = 2b+2$.

   D'autre part :

   $\lim\limits_{t\to+\infty} -t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$

   d'où, par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} b + \mathrm{e}^{-t} = b$

   et donc, par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{a}{b+\mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{a}{b}$

   d'où $\dfrac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b$

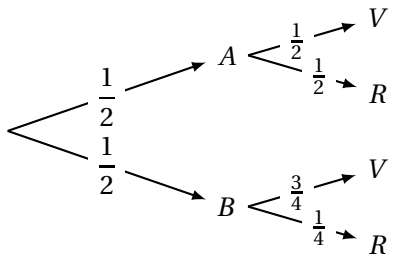
   On a donc $a = 2b + 2 = 3b$ d'où $b = 2$ et $a = 3 \times 2 = 6$

4. **Réponse C.**

   Soient :

   - A l'évènement « Alice choisit l'urne A »
   - B l'évènement « Alice choisit l'urne B »
   - V l'évènement « Elle obtient une boule verte »
   - R l'évènement « Elle obtient une boule rouge »

   La situation peut être représentée à l'aide de l'arbre ci-contre :



On cherche la probabilité $P_V(B)$.

$P(\text{V} \cap B) = P(B) \times P_B(V) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$

Les évènements A et B partitionnant l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$P(V) = P(V \cap A) + p(V \cap B) = P(A) \times P_A(V) + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

$P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{3}{5}$.

5. Réponse B.

On cherche l'algorithme qui permet de calculer la somme des 100 premiers termes de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

L'algorithme A. calcule chaque terme mais ils ne sont pas additionnés, ce n'est pas la réponse A.

L'algorithme C. initialise le compteur k, il ne peut donc pas comparer S à 100, l'algorithme ne fonctionne pas, ce n'est pas la réponse C.

L'algorithme D. initialise le compteur k à zéro mais il n'est pas incrémenté dans la boucle while, k faudra toujours 0 et l'algorithme ne s'arrête jamais, ce n'est donc pas l'algorithme D.

Par élimination, c'est donc l'algorithme B.

EXERCICE 2 6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x = \ln(2x+3) - 1 - x$.

1. $\lim\limits_{x \to -1,5^+} 2x+3 = 0^+$ ($x > -1,5$ donc $2x+3 > 0$)

or $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -1,5} \ln(2x+3) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -1,5} -1 - x = 0,5$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -1,5} g(x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

g est de la forme $\ln(u) + v$ avec $u(x) = 2x-3$ et $v(x) = -1-x$. On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1$.

$g' = \dfrac{u'}{u} + v'$ donc, pour tout réel $x \in]-1,5\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2}{2x+3} - 1 = \dfrac{2-2x-3}{2x+3} = \dfrac{-2x-1}{2x+3}$.

Sur l'intervalle $]-1,5\ ;\ +\infty[$, $2x+3$ est strictement positif donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-2x-1$: $g'(x)$ est donc strictement positif sur l'intervalle $]-1,5\ ;\ -0,5[$ et strictement négatif sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$.

g est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-1,5\ ;\ -0,5[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$, la fonction g est une fonction continue (car dérivable) et strictement décroissante. D'où le tableau de variations :

x	$-1,5$		$-0,5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	$\approx 0,19$	↘	
	$-\infty$				$-\infty$

$g(-0,5) = \ln(2\times(-0,5)+3) - 1 + 0,5 = \ln(2) - 0,5 \approx 0,19$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (admis), donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(-0,5)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$.

b. La calculatrice donne :

- $g(0,2) \approx 0,24$ et $g(0,3) \approx -0,02$ donc $0,2 < \alpha < 0,3$;
- $g(0,25) \approx 0,003$ et $g(0,26) \approx -0,002$ donc $0,25 \leqslant \alpha \leqslant 0,26$.

Partie B

1. f est croissante sur l'intervalle $]-1,5\,;\,+\infty[$ et donc en particulier sur l'intervalle $[-1\,;\alpha]$.

Donc $-1 \leqslant x \leqslant \alpha \Longrightarrow f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$.

Or $g(\alpha) = 0 = f(\alpha) - \alpha$ donc $f(\alpha) = \alpha$ et $f(-1) = \ln(2\times(-1)+3) - 1 = \ln(1) - 1 = -1$

donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, c'est à dire $f(x) \in [-1\,;\,\alpha]$.

2. **a.** *Initialisation :* à l'indice $n = 0$:

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0,099$ donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n donné, l'inégalité $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ est vraie. Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence :

$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

$\Longrightarrow f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ car f est croissante sur $[-1\,;\,\alpha]$

$\Longrightarrow -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ car $f(-1) = -1$ et $f(\alpha) = \alpha$

Si l'inégalité est vérifiée à l'indice n, alors, elle l'est aussi au rang suivant.

Conclusion : L'inégalité est vérifiée à l'indice 0 et sa véracité est héréditaire pour tout indice n naturel, donc, par principe de récurrence, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ pour tout entier naturel n.

b. On vient d'établir que :

pour tout entier naturel n , $u_n \leqslant \alpha$ donc la suite est majorée par α

et pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite est croissante,

elle est donc convergente.

EXERCICE 3 6 points

1. **a.** Dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$, on a les points suivants :

H(0 ; 2 ; 2), M(3 ; 0 ; 1) et N(3 ; 1 ; 1).

b. On a $\overrightarrow{\text{HM}}\begin{pmatrix} x_\text{M} - x_\text{H} \\ y_\text{M} - y_\text{H} \\ z_\text{M} - z_\text{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{\text{HM}}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_\text{H} + t x_{\overrightarrow{\text{HM}}} \\ y = y_\text{H} + t y_{\overrightarrow{\text{HM}}} \\ z = z_\text{H} + t z_{\overrightarrow{\text{HM}}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

2. Dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

B(2 ; 0 ; 0) C(2 ; 2 ; 0) F(2 ; 0 ; 2)

Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz, son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$\begin{aligned} M_t \in \text{(BCF)} &\iff x_{M_t} = 2 \\ &\iff 3t = 2 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$x_P = 2$, $y_P = 2 - 2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $z_P = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Cela confirme $\text{P}\left(2\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$

3. **a.** $\overrightarrow{\text{PM}}\begin{pmatrix} x_\text{M} - x_\text{P} \\ y_\text{M} - y_\text{P} \\ z_\text{M} - z_\text{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{\text{PN}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$\overrightarrow{\text{PM}} \cdot \overrightarrow{\text{PN}} = 1 \times 1 - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1 - \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

b. $\text{PM} = \sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{14}{9}} = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$

c. On sait que $\overrightarrow{\text{PM}} \cdot \overrightarrow{\text{PN}} = PM \times PN \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

On a donc $\dfrac{8}{9} = \dfrac{\sqrt{14}}{3} \times \dfrac{\sqrt{11}}{3} \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

d'où $\cos\left(\widehat{MPN}\right) = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$ soit $\widehat{MPN} \approx 50°$.

L'angle ne dépasse pas 55°, le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{\text{EN}}\begin{pmatrix} x_\text{N} - x_\text{E} \\ y_\text{N} - y_\text{E} \\ z_\text{N} - z_\text{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{\text{EN}}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_\text{E} + t x_{\overrightarrow{\text{EN}}} \\ y = y_\text{E} + t y_{\overrightarrow{\text{EN}}} \\ z = z_\text{E} + t z_{\overrightarrow{\text{EN}}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P.

EXERCICE 4 3 points

Vérifions d'abord la condition 1 portant sur la première phase.
Nous avons :

- une expérience à deux issues (le candidat est qualifié), le succès est « être qualifié », a une probabilité $p = 0,6$;
- cette expérience est répétée quatre fois (quatre candidats) de façon identique et indépendante, donc $n = 4$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,6$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(4\ ;\ 0,6)$.
La condition 1 « la deuxième phase doit avoir lieu dans 80% des cas » correspond à l'évènement « au moins deux candidats sont sélectionnés » a une probabilité supérieure ou égale à 0,8 (c'est à dire correspond à $P(X \geqslant 2) \geqslant 0,8$.
Avec la calculatrice : $P(X \geqslant 2) \approx 0,821$.
On a donc bien : $P(X \geqslant 2) \geqslant 0,8$, la condition 1 est donc vérifiée.

Pour la condition 2 :
Soit T la variable aléatoire donnant la durée de la deuxième phase.
Les valeurs prises par T sont : 0, 5, 9 et 11.
La deuxième phase dure 11 minutes lorsque quatre candidats sont sélectionnés donc
$P(T = 11) = P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^0 = 0,6^4 = 0,1296$.
De même :
$P(T = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4^1 = 0,3456$.
$P(T = 5) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 0,3456$.
$P(T = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{0} \times 0,6^0 \times 0,4^4 + \binom{4}{1} \times 0,6^1 \times 0,4^3 = 0,0256 + 0,1536 = 0,1792$
On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de la loi T :

t_i	0	5	9	11
$P(T = t_i)$	0,1792	0,3456	0,3456	0,1296

La durée moyenne du jeu correspond à l'espérance de la variable aléatoire T.
$E(T) = 0 \times P(T = 0) + 5 \times P(T = 5) + 9 \times P(T = 9) + 11 \times P(T = 11)$
$E(T) = 0 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296 = 6,264$
La durée moyenne du jeu est donc supérieur à 6 minutes, la deuxième condition n'est pas vérifiée, le jeu ne peut donc pas être retenu.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.