Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Métropole

Sujet 1 11 septembre 2023

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4 points**

1.

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-3}.$$

Avec $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3}$, on a $F'(x) = 2x \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3} = x\mathrm{e}^{x^2-3} = f(x)$: réponse **d.**

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1}.$$

Si pour tout entier naturel n, $u_n = \mathrm{e}^{2n+1}$, alors $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2(n+1)+1} = \mathrm{e}^{2n+2+1} = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{2n+1} = \mathrm{e}^2 \times u_n$: cette égalité montre que la suite (u_n) est géométrique de raison e^2 : réponse **c.**

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 15 \quad \text{et pour tout entier naturel } n \quad : u_{n+1} = 1,2u_n + 12.$$

3.

```
def seuil() :
    n=0
    u=15
    while u⩽10000:
      n=n+1
      u=1,2*u+12
    return(n)
```

Réponse **a.**

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$.

On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1,2u_n + 12 + 60 = 1,2u_n + 72 = 1,2(u_n + 60) = 1,2v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,2.

EXERCICE 2 **5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}(1\,;\,0\,;\,-1), \quad \mathrm{B}(3\,;\,-1\,;\,2), \quad \mathrm{C}(2\,;\,-2\,;\,-1) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(4\,;\,-1\,;\,-2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2+t \\ z &= -1+t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en comparant les premières coordonnées, s'il l'étaient on aurait $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, ce qui est faux), donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan unique $\mathscr{P}$.

b. On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis

- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 1 - 3 = 0$;
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur normal à ce plan.

Puisque $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ les droites (CD) et (AC) sont perpendiculaires en C, donc C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathscr{P}$.

c. Puisque $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, on sait que ses cordonnées sont dans l'ordre les coefficients a, b, c de x, y, z, soit :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x + 1y - 1z + d = 0$.

En particulier $C(2\,;\,-2\,;\,-1) \in \mathscr{P} \iff 2 \times 2 + 1 \times (-2) - 1 \times (-1) + d = 0 \iff 4 - 2 + 1 + d = 0 \iff d = -3$.

Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x + y - z - 3 = 0$.

2. **a.** On a grâce aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$, $CD^2 = 4 + 1 + 1 = 6$, d'où $CD = \sqrt{6}$.

b. Puisque C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathscr{P}$, ce point est celui qui est à la plus courte distance du point D, soit $\sqrt{6}$: il n'existe donc pas d'autre point de $\mathscr{P}$ situé à cette distance $\sqrt{6}$ de D ;

Ou encore : la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{6}$ est tangente en C au plan $\mathscr{P}$, donc quel que soit M dans $\mathscr{P}$, le triangle DCM est rectangle en C, d'hypoténuse [DM] et l'on sait qu'alors $DM > DC = \sqrt{6}$: tout point M du plan aurez que C est donc à une distance supérieure à $\sqrt{6}$ de D.

3. **a.** Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à Δ et à $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2+t \\ z &= -1+t \\ 2x+y-z-3 &= 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2 \times 0 + 2 + t - (-1+t) - 3 = 0 \iff 0 = 0 \text{ : ceci}$$

signifie que tout point de Δ appartient à $\mathscr{P}$ donc que Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.

b. Un vecteur directeur de la droite Δ est $\delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et avec $H(0\,;\,2+t\,;\,-1+t)$, on a $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} 4 \\ 3+t \\ 1+t \end{pmatrix}$.

Or (DH) $\perp \Delta \Rightarrow \delta \cdot \overrightarrow{\text{DH}} = 0 \iff 0+3+t+1+t=0 \iff 4+2t=0 \iff 2t=-4 \iff t=-2$.
On a donc H$(0\ ;\ 0\ ;\ -3) \in \Delta$.

c. On a donc $\overrightarrow{\text{DH}}\begin{pmatrix}4\\3-2\\1-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{DH}}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$; il en résulte que $\text{DH}^2 = 4^2+1^2+(-1)^2 = 18$.
Finalement $\text{DH} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

EXERCICE 3 **4 points**

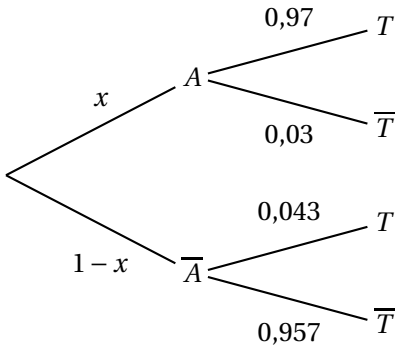
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Partie A

1. D'après l'énoncé :

- $p_A(T) = 0,97$;
- $p_{\overline{A}}\left(\overline{T}\right) = 0,957$;
- $p(T) = 0,2$.

D'où l'arbre pondéré :



2. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
$p(T) = p(A\cap T) + p\left(\overline{A}\cap T\right) = p(A)\times p_A(T) + p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}(T) = x\times 0,97 + (1-x)\times 0,043 = 0,97x + 0,043 - 0,043x = 0,927x + 0,043$.

b. Comme $p(T) = 0,2 = 0,927x + 0,043 \iff 0,157 = 0,927x \iff \dfrac{0,157}{0,927} = x$.
Or $\dfrac{0,157}{0,927} \approx 0,1694$ soit 0,169 au millième près.
$x = p(A) \approx 0,169$.

3. L'affirmation se traduit par : $p_T(A) > 0,8$.
Or $p_T(A) = \dfrac{p(T\cap A)}{p(T)} = \dfrac{p(A\cap T)}{p(T)} = \dfrac{p(A)\times p_A(T)}{p(T)} \approx \dfrac{0,169\times 0,97}{0,2}$, soit
$p_T(A) \approx \dfrac{0,163\,93}{0,2} \approx 0,819\,65$, soit environ 81,97 % : l'affirmation est vraie.

Partie B

1. Les tirages successifs étant indépendants et chaque personne ayant un probabilité d'être allergique égale à 0,08, X suit une loi de Bernoulli de paramètres $n = 150$ et $p = 0,08$.

2. La calculatrice donne $p(X = 20) \approx 0{,}008\,20$, soit 0,008 au millième près.

3. La calculatrice donne $p(X \leqslant 14) \approx 0{,}779\,7$, donc $p(X \geqslant 15) = 1 - p(X \leqslant 14) \approx 1 - 0{,}779\,7 \approx 0{,}220\,3$ soit 0,220 au millième près.

EXERCICE 4 **7 points**

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

Or $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur le trinôme $x^2 - 2x + 2$.

2. On a $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 - 1 + 2 = (x-1)^2 + 1$.

Comme $(x-1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, ce trinôme est donc supérieur à zéro pour tout $x > 0$: la fonction g est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. • On a $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{2}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Par somme de limites on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Par somme de limites on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

4.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

La fonction g est continue sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ car dérivable sur cet intervalle et on a démontré que sur cet intervalle la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

On a (calculatrice) $g(0{,}5) \approx -0{,}69$ et $g(1) = 1$, le même théorème permet d'affirmer que $0{,}5 < \alpha < 1$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x.$$

1. On admet que pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^x \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

Produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f''(x) = \mathrm{e}^x \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) + \mathrm{e}^x \left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x \left(\dfrac{1}{x} + \ln x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ln x\right)$.

2. On a donc $f''(x) = \mathrm{e}^x g(x)$.

3. **a.** Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$ donné précédemment, soit

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b. On sait que si $f''(\beta) = 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse β.
Or $f''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x g(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha$.
Rem. : la calculatrice donne $\alpha \approx 0{,}592$, puis $f(\alpha) \approx -0{,}948$. Le point A$(0{,}592\ ;\ -0{,}948)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. On a vu que sur sur l'intervalle $]0\ ;\ \alpha]$, la dérivée seconde est négative : la fonction f est concave sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$ la dérivée seconde est positive : la fonction f est convexe sur cet intervalle.

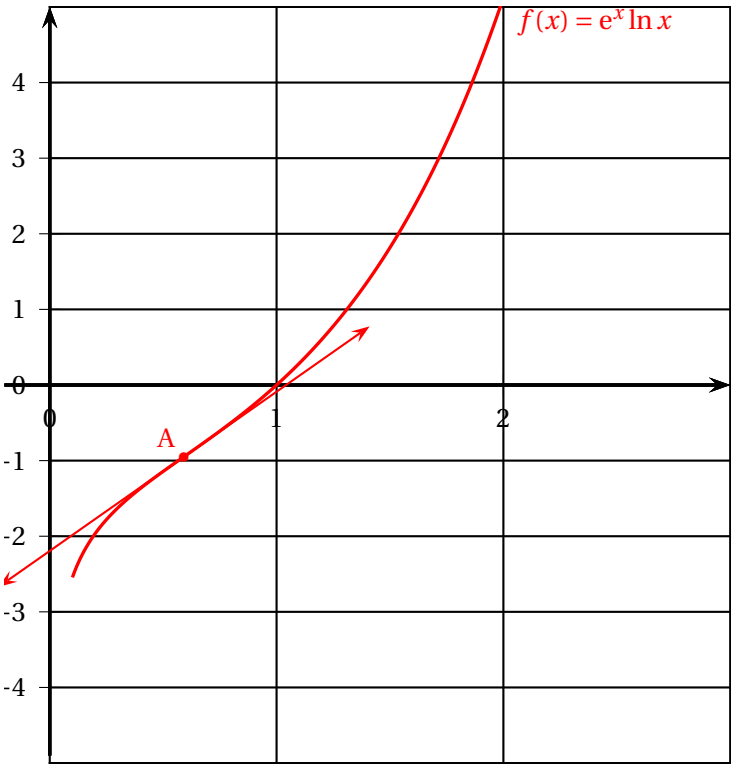
4. **a.** • On a $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;
• On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. On sait que $g(\alpha) = 0 \iff \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0 \iff \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^2}(1-2\alpha)$.
Donc $f'(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \ln\alpha\right) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha}\right) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$.

c. On sait que $\mathrm{e}^\alpha > 0$, $\alpha^2 > 0$ et que $\alpha \approx 0{,}592 < 1$, donc $1 - \alpha > 0$. Donc $f'(\alpha) > 0$ comme produit de trois facteurs supérieurs à zéro.
On a vu que $f''(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, donc :
• sur $]0\ ;\ \alpha]$, $g(x) < 0$, donc $\mathrm{e}^x g(x) = f''(x) < 0$: la fonction f' est décroissante sur cet intervalle ;
• sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$, donc $\mathrm{e}^x g(x) = f''(x) > 0$: la fonction f' est croissante sur cet intervalle ;
• Donc $f'(\alpha)$ est le minimum de la fonction f' sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Ce minimum étant supérieur à zéro, on a donc $f'(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et enfin la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.

d. On peut établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$			
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\approx -0{,}948$	↗	0	↗	$+\infty$


$f(x) = e^x \ln x$
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
A

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.