Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé EDS 2023 Nouvelle Calédonie Jour 1

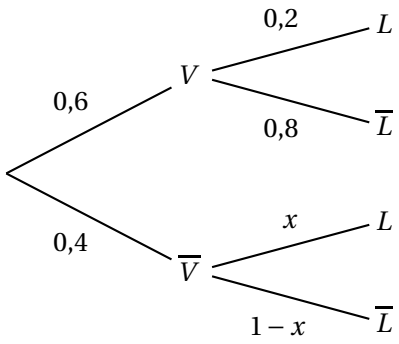
S. DIBOS

28 août 2023

Exercice 1 **5 points**

Partie A

1.



2. La probabilité qu'un client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE est $P\left(V \cap \overline{L}\right)$.

$$P\left(V \cap \overline{L}\right) = P(V) \times P_V\left(\overline{L}\right) = 0{,}6 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}48}$$

3. Les évènements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(L) = P(V \cap L) + P\left(\overline{V} \cap L\right)$$

On a $P(V \cap L) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$.

Posons $P\left(\overline{V} \cap L\right) = p$. On a :

$$P(L) = 0{,}12 + p \iff 0{,}42 = 0{,}12 + p \iff p = 0{,}42 - 0{,}12 = \boxed{0{,}3}$$

On a donc bien $P\left(\overline{V} \cap L\right) = 0{,}3$.

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\overline{V}}(L) = \frac{P\left(\overline{V} \cap L\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \boxed{\frac{3}{4} = 0{,}75}$$

5. La probabilité qu'un client ait choisi un voilier, sachant qu'il a pris l'option PILOTE est, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}12}{0{,}42} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0{,}29}$$

Partie B

1.

$$P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0{,}42 \times 0{,}005 = \boxed{0{,}002\,1}$$

$$P\left(\overline{L} \cap A\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{V}}(A) = (1 - 0{,}42) \times 0{,}12 = \boxed{0{,}069\,6}$$

2. Les évènements L et $\overline{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(L \cap A) + P\left(\overline{L} \cap A\right) = 0{,}002\,1 + 0{,}069\,6 = 0{,}071\,7$$

La probabilité que le bateau loué par un client choisi au hasard subisse une avarie est donc 0,071 7.

Puisque l'entreprise loue 1 000 bateaux, elle peut s'attendre à $1\,000 \times 0{,}002\,1 \approx 72$ avaries.

Partie C

1. Les paramètres de la loi binomiale suivie par X sont $\boxed{n = 40}$ et $\boxed{p = 0{,}42}$.

2. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(X \geqslant 15)$:

$$\boxed{P(X \geqslant 15) \approx 0{,}768}$$

Exercice 2 **5 points**

1. **a.**

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 0 - 3 = 15 - 3 = \boxed{12}$$

;

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

;

c. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. **a.** Soit P_n la proposition $u_n \geqslant n + 1$.
Initialisation : $u_0 = 3$ et $0 + 1 = 1$.
$3 \geqslant 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant n+1 &\iff 5u_n \geqslant 5(n+1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant n+2 = (n+1)+1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant n+1$.

b. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$. Puisque $u_n \geqslant n+1$, par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

3. a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5(u_n - n - 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n}$$

c. $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$. Donc :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$$

d. Puisque $5 > 1$, la suite de terme général 5^n est strictement croissante, donc $5^{n+1} \geqslant 5^n$.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} \geqslant 5^n &\iff 2 \times 5^{n+1} \geqslant 2 \times 5^n \\ &\iff 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 \geqslant 2 \times 5^n + (n+1) + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 2 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. a.

```
def suite():
  u=3
  n=0
  while u<10**7:
    u= 5*u-4*n-3
    n=n+1
  return n
```

b.

u	n	u < 10^7
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^7$.

Exercice 3 **5 points**

1. On a $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Donc les primitives de f sont de la forme $F(x) = x\,\mathrm{e}^x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Donc $F(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de f.

Réponse a.

2. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1) et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2).

On a $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{1}$, donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Supposons qu'elle soient sécantes en un point A. Alors les coordonnées $(a\,;\ b\,;\ c)$ de A vérifient les deux représentations paramétriques :

$$\begin{cases} a = 2+r \\ b = 1+r \\ c = -r \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = 1-s \\ b = -1+s \\ c = 2-s \end{cases}.$$

On a donc $-r = 2-s \iff r = s-2$ et $2+r = 1-s \iff 2+s-2 = 1-s \iff 2s = 1 \iff s = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $b = -1+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $a = 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $c = 2-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Les deux droites sont sécantes en $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\,;\ -\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Réponse a.

3. Un vecteur normal au plan (P) est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (Δ) est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{n} \cdot \vec{u} = 2\times 1 - 1\times 1 + 1\times(-1) = 0$, donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux. Donc (P) et (Δ) sont parallèles.

S'il existe un point commun à (P) et (Δ), alors (Δ) est incluse dans (P).

(Δ) passe par le point de coordonnées (2 ; 4 ; 1). Or $2\times2-4+1-1=0$, donc ce point est un point du plan (P). La droite (Δ) est donc incluse dans le plan (P).

Réponse b.

4. Un vecteur normal à (P_1) est $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à (P_2) est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-2}{1}$, donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont donc pas parallèles. Ils sont donc sécants.

De plus $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1\times2-2\times1+1\times1=1$, donc les vecteurs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ ne sont pas orthogonaux. Les plans ne sont donc pas perpendiculaires.

Réponse c.

5. On sait que $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EG}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}\right)\iff\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}}{\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EG}\right\|}$

On a : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2-1\\4-2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-2-1\\2-2\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=1\times(-3)+2\times0+2\times4=5$

$\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\left\|\overrightarrow{EG}\right\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Donc : $\cos\alpha=\dfrac{5}{3\times5}=\dfrac{1}{3}$, soit $\alpha\approx71°$ d'après la calculatrice. **Réponse d.**

Exercice 4 **5 points**

1. **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to0}\left(5x^2+2x\right)=0\\ \text{Par croissance comparée}\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2\ln(x)=0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]=0$$

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0}$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}\right)=5\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\times 2x+2-2\left[2x\times\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right] = 10x+2-2\left[2x\ln(x)+x\right] = 10x+2-4x\ln(x)-2x \\ &= \boxed{8x+2-4x\ln(x)} \end{aligned}$$

3. **a.**

$$f''(x) = 8-4\left[1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right] = 8-4\ln(x)-4 = 4-4\ln(x) = \boxed{4\left[1-\ln(x)\right]}$$

b. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe, ce qui équivaut à $f''(x)$ est positif.
$f''(x) \geqslant 0 \iff 4\left[1-\ln(x)\right] \geqslant 0 \iff 1-\ln(x) \geqslant 0 \iff -\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant \text{e}$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$).

La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,\text{e}]$.

c.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f'	‖ 2	↗	$4\text{e}+2$	↘	$-\infty$

$$f'(\text{e}) = 8\text{e}+2-4\text{e}\ln(\text{e}) = 8\text{e}+2-4\text{e} = 4\text{e}+2$$

4. **a.** Sur $]0\,;\,\text{e}]$, la fonction f' est strictement croissante avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$, donc pour tout $x \in]0\,;\,\text{e}]$,on a $f'(x) > 0$.

Sur $\left[\text{e}\,;\,+_i nf ty\right[$, la fonction f' est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f(_t exte) = 4\text{e}+2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$. $0 \in]-\infty\,;\,4\text{e}+2[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[\text{e}\,;\,+\infty[$.

Au final, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty[$.

On a :

$$\boxed{7{,}87 < \alpha < 7{,}88}$$

b. On sait que sur $]0\,;\,e]$ on a $f'(x) > 0$. Puisque f' est décroissante sur $[e\,;\,+\infty[$ et qu'elle s'annule en α, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[e\,;\,\alpha]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$. Donc $f'(x)$ est positif sur $]0\,;\,\alpha]$ et négatif sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ 0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

5. On a $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha)$, donc :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff 4\alpha\ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\ &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha+1)}{4\alpha} \qquad (\alpha \neq 0) \\ &\iff \boxed{\ln(\alpha) = \frac{4\alpha+1}{2\alpha}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2\ln(\alpha) \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha+1}{2\alpha} \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha+1) \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha \\ &= \boxed{\alpha^2 + \alpha} \end{aligned}$$

6. D'après la question **4.a.**, on a :

$$\begin{aligned} 7{,}87 < \alpha < 7{,}88 &\iff 61{,}936\,9 < \alpha^2 < 62{,}094\,4 \\ &\iff 69{,}806\,9 < \alpha^2 + \alpha < 69{,}974\,4 \\ &\iff \boxed{69{,}806\,9 < f(\alpha) < 69{,}974\,4} \end{aligned}$$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.