Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

CORRECTION DU BAC

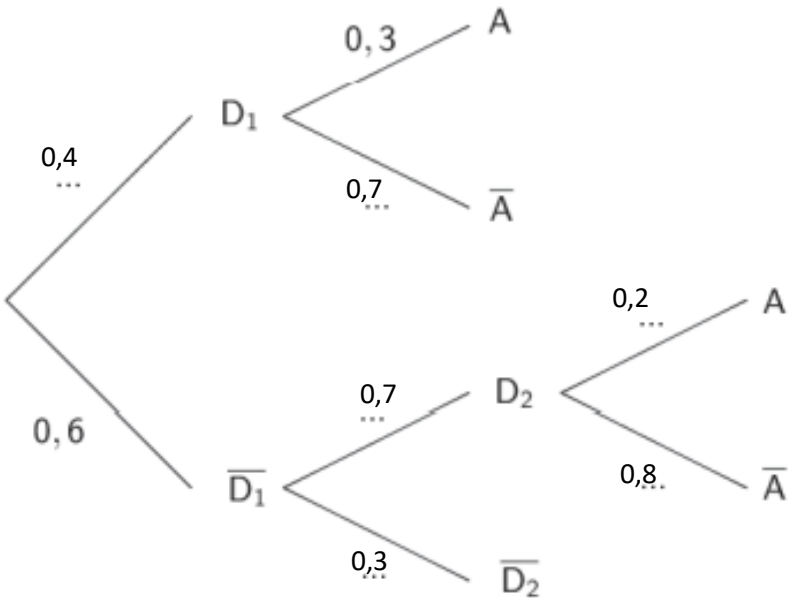
MATHEMATIQUES

LA REUNION – 2023 – JOUR 1

<u>Exercice 1 :</u> Probabilités

Partie A

1. D'après $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = 0{,}3$ et $P_{D_2}(A) = 0{,}2$



2. D'après la formule des probabilités totales :
$\boldsymbol{P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}204}$

3. On calcule $P_A(D_1)$
$P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}204} = \frac{10}{17} \approx 0{,}59.$
La probabilité que la personne ait décroché au premier appel sachant qu'elle a acheté le produit est de $\frac{10}{17}$, soit environ 0,59.

Partie B :

1. a. **X suit la loi binomiale $B(30\,;0{,}204)$.**

   b. On calcule $P(X = 6)$.
   $P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0{,}204^6 \times 0{,}796^{24} = 593775 \times 0{,}204^6 \times 0{,}796^{24} \approx 0{,}179.$
   La probabilité qu'exactement 6 personnes achètent le produit est d'environ 0,179.

   c. $\boldsymbol{E(X) = np = 30 \times 0{,}204 = 6{,}12}$
   Sur un grand nombre d'échantillons de 30 personnes, en moyenne 6,12 personnes achèteront le produit.

2. On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes qui achètent le produit dans un échantillon de n personnes contactées.
Appeler une personne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la personne achète le produit » de probabilité 0,204.
On répète n fois cette épreuve de façon identique et indépendante. On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0{,}204$.
La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès (le nombre de personnes ayant acheté le produit) suit donc la loi binomiale $B(n\,;0{,}204)$.

On calcule la probabilité qu'au moins une personne achète le produit, soit $P(Y \geq 1)$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}204^0 \times 0{,}796^n$
$P(Y \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times 0{,}796^n = 1 - 0{,}796^n$.
On cherche n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0{,}99$
$\Leftrightarrow 1 - 0{,}796^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}796^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow \ln(0{,}796^n) \leq \ln 0{,}01$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\Leftrightarrow n \ln 0{,}796 \leq \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}796}$ car $0{,}796 < 1$ donc $\ln 0{,}796 < 0$.
Or, $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}796} \approx 20{,}18$ donc $n \geq 21$. Ainsi, **il est nécessaire de contacter au moins 21 personnes pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.**

Exercice 2 : Fonctions

1. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ (croissance comparée) donc par produit $\lim\limits_{x\to 0}(-2x\ln x)=0$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1}$

En $+\infty$, forme indéterminée

Pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$, $f(x)=x(3+\frac{1}{x}-2\ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\ln x)=-\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(3+\frac{1}{x}-2\ln x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$**.**

2. **a.** f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,

Pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$, $\boldsymbol{f'(x)=3-2\ln x+x\times\frac{-2}{x}=3-2-2\ln x=1-2\ln x}$.

b. Pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0\Leftrightarrow 1-2\ln x>0\Leftrightarrow\ln x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x<e^{\frac{1}{2}}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a donc :

$\boldsymbol{x}$	**0**		$\boldsymbol{e^{\frac{1}{2}}}$		α	$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$	**|**	**+**	**0**	**-**		
Variations de $\boldsymbol{f}$	**|** **|** **|1**	↗	$\boldsymbol{2e^{\frac{1}{2}}+1}$	↘	0	$-\infty$

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=3e^{\frac{1}{2}}+1-2\times e^{\frac{1}{2}}\times\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=3e^{\frac{1}{2}}+1-2\times e^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=2e^{\frac{1}{2}}+1$

3. **a.** Sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=2e^{\frac{1}{2}}+1>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ et $0\in[2e^{\frac{1}{2}}+1\,;\,-\infty[$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$.

Sur $]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1>0$ donc sur$]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}]$, f est strictement positive. Ainsi, l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution sur $]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}]$.

Ainsi, l'équation $\boldsymbol{f(x)=0}$ admet exactement une solution $\boldsymbol{\alpha}$ sur $\boldsymbol{]0\,;\,+\infty[}$.

b. D'après le tableau de variations, on peut déduire le tableau de signe suivant :

$\boldsymbol{x}$	**0**		$\boldsymbol{\alpha}$		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{f(x)}$	**|**	**+**	**0**	**-**	

4. F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Donc, f est la dérivée de F sur $]0\ ;\ +\infty[$. On sait que, sur $[e^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty[$, f est positive sur $[e^{\frac{1}{2}}; \alpha]$ et négative sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$, ainsi, sur $[e^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty[$, F n'est pas monotone, **on ne peut donc pas affirmer qu'elle est strictement décroissante.**

5. **a.** La fonction f' est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = -\frac{2}{x}$.
Pour tout $\in]0\ ;\ +\infty[, x > 0$ donc par quotient $f''(x) < 0$. Ainsi, **la fonction f est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.**

b. $f'(1) = 1 - 2\ln(1) = 1 - 2 \times 0 = 1$
et $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln 1 = 3 + 1 - 2 \times 0 = 4$.
T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 4 = \boldsymbol{x + 3}$.

c. La fonction f est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc C_f est au-dessus de ses tangentes, et en particulier de T.
Donc pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[, f(x) \geq x + 3 \Leftrightarrow 3x + 1 - 2x\ln x \geq x + 3$
$\Leftrightarrow -2x\ln x \geq -2x + 2 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{-2x+2}{-2x} \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{-2x}{-2x} + \frac{2}{-2x} \Leftrightarrow \boldsymbol{\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}}$.

Exercice 3 : Suites

Partie A : QCM

1. $u_0 = 3 \quad u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = 2{,}5$
$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2} \times 2{,}5 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{4}$ **Réponse a.**

2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1$
$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. **Réponse b.**

3. Dans la boucle, le rang du terme calculé est donné par i + 1, donc, le n de la définition de la suite doit être remplacé par i. Ainsi, la ligne 4 doit complétée par l'instruction U = U/2 + i/2 + 1 **Réponse d.**

Partie B

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $n \leq u_n \leq n + 3$.

Initialisation : $u_0 = 3$ $n = 0$ et $n + 3 = 0 + 3 = 3$ or $0 \leq 3 \leq 3$ donc $0 \leq u_0 \leq 0 + 3$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k, $k \leq u_k \leq k + 3$ et montrons qu'alors $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + 4$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $k \leq u_k \leq k + 3$.
On multiplie par $\frac{1}{2} > 0 \quad \frac{1}{2}k \leq \frac{1}{2}u_k \leq \frac{1}{2}(k + 3)$
On ajoute $\frac{1}{2}k + 1 \quad \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k + 1 \leq \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}k + 1 \leq \frac{1}{2}k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}k + 1$
Par définition, $\frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}k + 1 = u_{k+1}$
On a donc : $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + \frac{5}{2}$
Or, $\frac{5}{2} \leq 4$ donc $k + \frac{5}{2} \leq k + 4$
On a alors : $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + \frac{5}{2} \leq k + 4$ soit $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + 4$.
La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{n \leq u_n \leq n + 3}$.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $n \leq u_n$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc, d'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, $n \leq u_n \leq n+3$

On divise par $n > 0$, $\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+3}{n}$, soit $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n}{n} + \frac{3}{n}$ soit $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1}$.

Exercice 4 : Géométrie dans l'espace

1. $\boldsymbol{F(1\,;1\,;1)}$ **et** $\boldsymbol{C(0\,;1\,;0)}$**.**

2. M est le centre de la face $BCGF$ donc il s'agit du milieu du segment $[FC]$.
   Donc, $M\left(\frac{x_C+x_F}{2}\,;\frac{y_C+y_F}{2}\,;\frac{z_C+z_F}{2}\right)$ donc $\boldsymbol{M(0,5\,;1\,;0,5)}$.
   N est le centre de la face $EFGH$ donc il s'agit du milieu du segment $[FH]$.
   $H(1\,;0\,;0)$ donc $N\left(\frac{x_F+x_H}{2}\,;\frac{y_F+y_H}{2}\,;\frac{z_F+z_H}{2}\right)$ donc $\boldsymbol{N(1\,;0,5\,;0,5)}$.

3. **a.** On vérifie que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HC}$.
   $A(0\,;0\,;1)\quad G(1\,;1\,;0)$
   $\overrightarrow{AG}(x_G-x_A\,;y_G-y_A\,;z_G-z_A)\quad \overrightarrow{AG}(1\,;1\,;-1)$
   $\overrightarrow{HF}(x_F-x_H\,;y_F-y_H\,;z_F-z_H)\quad \overrightarrow{HF}(0\,;1\,;1)$
   $\overrightarrow{HC}(x_C-x_H\,;y_C-y_H\,;z_C-z_H)\quad \overrightarrow{HC}(-1\,;1\,;0)$
   On remarque les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HC}$ ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et définissent bien le plan (HFC).
   $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HF}=1\times 0+1\times 1+(-1)\times 1=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux.
   $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HC}=1\times(-1)+1\times 1+(-1)\times 0=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux.
   Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à des vecteurs directeurs du plan (HFC) donc **il est normal au plan** $\boldsymbol{(HFC)}$**.**

   b. Le plan (HFC) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;-1)$.
   Donc, le plan (HFC) a pour équation cartésienne $x+y-z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
   De plus $C(0\,;1\,;0)\in(HFC)$ donc $x_C+y_C-z_C+d=0\Leftrightarrow 0+1+0+d=0\Leftrightarrow d=-1$. Ainsi, le plan (HFC) a pour équation cartésienne $\boldsymbol{x+y-z-1=0}$.

4. La droite (AG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;-1)$ et passe par le point $A(0\,;0\,;1)$.
   La droite (AG) a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} \boldsymbol{x=t} \\ \boldsymbol{y=t} \\ \boldsymbol{z=1-t} \end{cases}$ $\boldsymbol{t\in\mathbb{R}}$**.**

5. La droite (AG) a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (HFC) donc la droite (AG) est perpendiculaire au plan (HFC). Ainsi, comme $G\in(AG)$, le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC) et le point d'intersection entre la droite (AG) et le plan (HFC).
   On considère le point $R\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$. Montrons qu'il appartient au plan (HFC).
   $x_R+y_R-z_R-1=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-1=0$ donc le point R appartient au plan (HFC).

Montrons que le point R appartient aussi à la droite (AG), c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_R = t \\ y_R = t \\ z_R = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = 1 - z_R = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$ donc t existe donc le point R appartient à la droite (AG). Ainsi, le point R est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (HFC). **Le point $\boldsymbol{R\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)}$ est le projeté orthogonal du point $\boldsymbol{G}$ sur le plan $\boldsymbol{(HFC)}$.**

6. Soit K un point quelconque de la droite (FG). Pour tout réel t, $K(1\,;1\,;t)$.
Le triangle KMN est rectangle en K si, et seulement si, $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN} = 0$
$\overrightarrow{KM}(x_M - x_K\,;y_M - y_K\,;z_M - z_K)$ $\quad \overrightarrow{KM}(-0{,}5\,;0\,;0{,}5 - t)$
$\overrightarrow{KN}(x_N - x_K\,;y_N - y_K\,;z_N - z_K)$ $\quad \overrightarrow{KN}(0\,;-0{,}5\,;0{,}5 - t)$
$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN} = (-0{,}5) \times 0 + 0 \times (-0{,}5) + (0{,}5 - t)^2 = (0{,}5 - t)^2$
Donc $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN} = 0 \Leftrightarrow (0{,}5 - t)^2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}5 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}5$. Donc, **il existe un unique point $\boldsymbol{K}$ de la droite $\boldsymbol{(FG)}$ tel que le triangle $\boldsymbol{KMN}$ est rectangle en $\boldsymbol{K}$: $\boldsymbol{K(1\,;1\,;0{,}5)}$.**

7. Le cube $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, donc son volume est de 1 unité de volume.
On prend pour base du tétraèdre $FNKM$ le triangle KMN rectangle en K.
Ainsi, son aire est $A = \frac{KM \times KN}{2}$.
$\overrightarrow{KM}(-0{,}5\,;0\,;0{,}5 - 0{,}5)$ soit $\overrightarrow{KM}(-0{,}5\,;0\,;0)$ donc $KM = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 0^2 + 0^2} = 0{,}5$ unités de longueur
$\overrightarrow{KN}(0\,;-0{,}5\,;0{,}5 - 0{,}5)$ soit $\overrightarrow{KN}(0\,;-0{,}5\,;0)$ donc $KN = \sqrt{0^2 + (-0{,}5)^2 + 0^2} = 0{,}5$ unités de longueur
$A = \frac{0{,}5 \times 0{,}5}{2} = \frac{1}{8}$ unités d'aire.

Vérifions que $[FK]$ est la hauteur du tétraèdre $FNKM$ relative à la base KMN.
$\overrightarrow{FK}(x_K - x_F\,;y_K - y_F\,;z_K - z_F)$ $\quad \overrightarrow{FK}(0\,;0\,;-0{,}5)$.
$\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{KM} = 0 \times (-0{,}5) + 0 \times 0 + (-0{,}5) \times 0 = 0$
$\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{KN} = 0 \times 0 + 0 \times (-0{,}5) + (-0{,}5) \times 0 = 0$
Donc, le vecteur $\overrightarrow{FK}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (KMN), ainsi, $[FK]$ est la hauteur du tétraèdre $FNKM$ relative à la base KMN.
$FK = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-0{,}5)^2} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$
Donc le volume V du tétraèdre $FNKM$ est $V = \frac{1}{3} \times A \times FK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$ unités de volume.
Ainsi, **le volume du tétraèdre $\boldsymbol{FNKM}$ représente $\boldsymbol{\frac{1}{48}}$ du volume du cube $\boldsymbol{ABCDEFGH}$.**

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.