Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

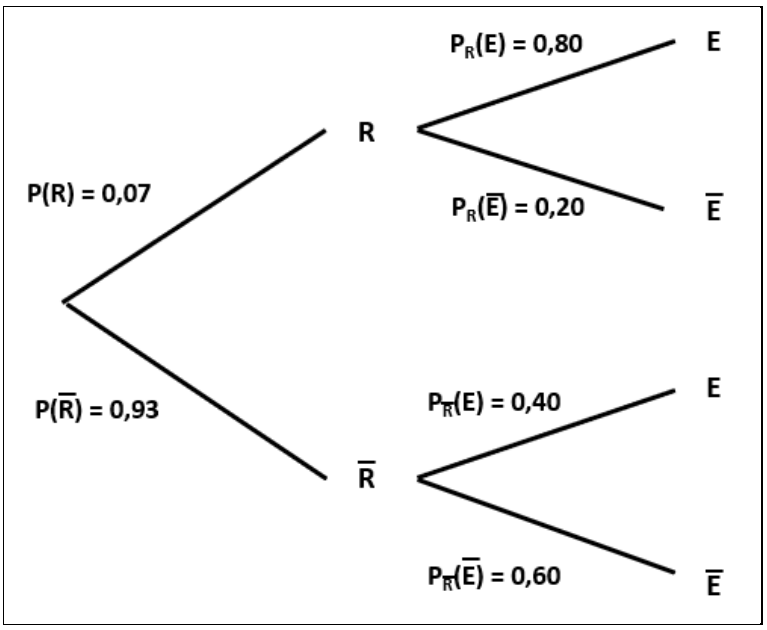
Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On construit un arbre de probabilités avec deux premiers embranchements :

- R : tirer un objet rare avec $P(R) = 0{,}07$
  - E | R : c'est une épée sachant que c'est rare, $P(E \mid R) = 0{,}80$
  - $\bar{E} \mid R$: un bouclier rare, $P(\bar{E} \mid R) = 0{,}20$
- $\bar{R}$: tirer un objet commun avec $P(\bar{R}) = 0{,}93$
  - E | $\bar{R}$: une épée commune, $P(E \mid \bar{R}) = 0{,}40$
  - $\bar{E} \mid \bar{R}$: un bouclier commun, $P(\bar{E} \mid \bar{R}) = 0{,}60$



On réalise le calcul demandé :

$$P(R \cap E) = P(R) \times P(E \mid R) = 0{,}07 \times 0{,}80 = 0{,}056$$

2. Probabilité de tirer une épée :

$$P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E) = 0{,}07 \times 0{,}80 + 0{,}93 \times 0{,}40 = 0{,}056 + 0{,}372 = 0{,}428$$

3. On cherche $P(R \mid E)$, la probabilité que l'objet soit rare sachant que c'est une épée. On applique la formule de probabilité conditionnelle :

$$P(R \mid E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}056}{0{,}428} \approx 0{,}131$$

Partie B

1. On répète 30 fois un tirage indépendant avec deux issues possibles : obtenir un objet rare (succès) ou non (échec), avec $p = 0{,}07$. Donc :

- $X \sim \mathcal{B}(30; 0{,}07)$
- Espérance : $\mathbb{E}(X) = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$

2. Cela se calcule à l'aide de la loi binomiale :

$$P(X < 6) = \sum_{k=0}^{5} \binom{30}{k} \cdot (0{,}07)^k \cdot (0{,}93)^{30-k}$$

À la calculatrice (mode examen activé) :

$$P(X < 6) \approx 0{,}984$$

3. On cherche la plus grande valeur k telle que $P(X \geq k) \geq 0{,}5$

Cela revient à chercher le plus grand k tel que $P(X < k) < 0{,}5$

À la calculatrice, on trouve que :

- $P(X \geq 2) \approx 0{,}650$
- $P(X \geq 3) \approx 0{,}455$

Donc, la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0{,}5$ est 2.

Interprétation : dans au moins 50 % des cas, le joueur obtient au moins 2 objets rares en 30 tirages.

4. On veut déterminer le plus petit entier N tel que la probabilité d'avoir au moins un objet rare parmi les N tirages soit ≥ 0,95.

On note :

$$P(\text{au moins un rare}) = 1 - P(\text{aucun rare}) = 1 - (1 - 0{,}07)^N \geq 0{,}95$$

Donc :

$$(0{,}93)^N \leq 0{,}05$$

On résout :

$$N\ln(0{,}93) \leq \ln(0{,}05) \Rightarrow N \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)}$$

$$N \geq \frac{-2{,}996}{-0{,}072} \approx 41{,}6$$

Donc $N_{\text{min}} = 42$

EXERCICE 2 (4 points)

1. On cherche une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(1;0;3)$ et $B(4;1;0)$.

Le vecteur directeur est :

$$\overrightarrow{AB} = (4-1;1-0;0-3) = (3;1;-3)$$

Une représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 0+t \\ z = 3-3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Réponse correcte : **c**

2. La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

On teste les points :

- $M(7;6;6)$:
  Pour $x = 7 \Rightarrow t = 1$
  Alors $y = 6 \times 1 = 6$ et $z = 4 - 2 \times 1 = 2 \neq 6$. Donc M n'appartient pas à d.
- $N(3;6;4)$:
  Pour $x = 3 \Rightarrow t = 0$
  Alors $y = 0$, or ici $y = 6$. Donc N n'appartient pas à d.
- $P(4;6;-2)$:
  Pour $y = 6 \Rightarrow t = 1$
  Alors $x = 3 + 4 = 7 \neq 4$. Donc P n'appartient pas à d.
- $R(-3;-9;7)$:
  Pour $y = -9 \Rightarrow t = -1{,}5$
  Alors :

$$x = 3 + 4 \times (-1{,}5) = 3 - 6 = -3$$

$$z = 4 - 2 \times (-1{,}5) = 4 + 3 = 7$$

Le point vérifie bien toutes les coordonnées.

Réponse correcte : **d**

3. La droite d a pour vecteur directeur : $\vec{u} = (4; 6; -2)$
La droite d' a pour représentation :

$$\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Donc son vecteur directeur est : $\vec{v} = (3; -2; 1)$

On cherche à savoir si les droites sont coplanaires, parallèles, sécantes ou non coplanaires.
On calcule le produit mixte des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$, où $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur reliant un point de d (par exemple $A = (3; 0; 4)$) à un point de d' (par exemple $B = (-2; -1; 1)$)

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 3; -1 - 0; 1 - 4) = (-5; -1; -3)$$

On calcule :

$$\text{mixte} = \det\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est non nul (on le vérifie si besoin), donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
Les droites ne sont donc pas coplanaires.

Réponse correcte : **b**

4. Le plan P est perpendiculaire à la droite d, donc son vecteur normal est le vecteur directeur de d, soit $\vec{u} = (4; 6; -2)$.

On cherche une équation du plan de la forme :

$$4(x - 2) + 6(y - 1) - 2(z - 0) = 0 \Rightarrow 4x + 6y - 2z - 14 = 0$$

On peut simplifier cette équation :

$$2x + 3y - z - 7 = 0$$

Réponse correcte : **a**

EXERCICE 3 (5 points)

On étudie la fonction :

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x} \quad \text{définie sur }]0; +\infty[$$

Partie A : lectures graphiques

1. On lit graphiquement la pente de la tangente T au point $A(1; -1)$. Cette tangente passe par $A(1; -1)$ et $B(0; -4)$, donc on peut utiliser la formule :

$$f'(1) = \frac{-1 - (-4)}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Équation réduite de la tangente T :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) - 1 = 3x - 4$$

2. D'après la courbe :

- La fonction semble concave sur $]0; 1[$
- Elle semble convexe sur $]1; +\infty[$

Le point A semble être un point d'inflexion (changement de convexité).

Partie B : étude analytique

1. On commence par simplifier l'expression :

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x} = x \cdot 2\ln(x) - \frac{1}{x} = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

Limite en $+\infty$:

- $2x\ln(x) \to +\infty$
- $\frac{1}{x} \to 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Limite en 0 :

- $x\ln(x) \to 0$
- $\frac{1}{x} \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

2.a. On dérive la fonction $f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$

On utilise la formule $(x\ln x)' = \ln x + 1$, donc :

$$f'(x) = 2(\ln x + 1) + \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 2 + \frac{1}{x^2}$$

2.b. On admet que f est deux fois dérivable. On dérive $f'(x)$ pour obtenir $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x^3}$$

3.a. On étudie le signe de $f''(x)$:

- Le dénominateur $x^3 > 0$ pour $x > 0$
- Le numérateur change de signe en $x = 1$

Donc :

- $f''(x) < 0$ sur $]0; 1[$ → fonction concave.
- $f''(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ → fonction convexe.

Il y a bien un point d'inflexion en $x = 1$

3.b. On étudie la variation de f'. On sait que :

$$f'(x) = 2\ln x + 2 + \frac{1}{x^2}$$

On ne calcule pas directement f'' pour ça, car ce serait trop lourd ici.
Mais on peut regarder les valeurs de $f'(x)$ pour connaître le signe de la dérivée :

- $f'(x) > 0$ sur tout $]0; +\infty[$, car :
  - $2\ln x \to -\infty$ en 0, mais compensé par $\frac{1}{x^2} \to +\infty$
  - Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4.a. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

On a vu que :

- $f(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$

- $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$
- f est continue et strictement croissante

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que :

$$f(\alpha) = 0$$

4.b. À la calculatrice, on trouve :

$$\alpha \approx 1{,}24$$

On veut montrer que :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

On reprend l'expression de $f(x)$ sous forme :

$$f(x) = 2x\ln x - \frac{1}{x}$$

Posons $x = \alpha$ tel que $f(\alpha) = 0$, donc :

$$2\alpha\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

$$2\alpha^2\ln\alpha = 1$$

$$\ln\alpha = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\alpha = \exp\left(\frac{1}{2\alpha^2}\right)$$

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Ce qui est bien l'égalité demandée.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\,dx$$

1. Pour $n = 0$, on a :

$$I_0 = \int_0^{\pi} e^0 \sin(x)\, dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

2.a. Pour tout n, la fonction $e^{-nx}\sin(x)$ est positive sur $[0;\pi]$ car $e^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geq 0$ sur cet intervalle, donc :

$$I_n \geq 0$$

2.b. Pour tout n, $e^{-(n+1)x} < e^{-nx}$ sur $]0;\pi]$.

Et comme $\sin(x) \geq 0$, on a :

$$e^{-(n+1)x}\sin(x) \leq e^{-nx}\sin(x) \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

2.c. La suite (I_n) est positive et décroissante, donc elle est convergente.

3.a. On veut majorer I_n. Or, sur $[0;\pi]$, on a $\sin(x) \leq 1$, donc :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\, dx \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} \cdot 1\, dx = \int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx$$

3.b. Calcul de l'intégrale majorante :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\pi} = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

3.c. On sait que :

$$I_n \leq \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

Or lorsque $n \to +\infty$, alors $e^{-n\pi} \to 0$, donc :

$$\frac{1 - e^{-n\pi}}{n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

4.a. On intègre $I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x) dx$ par parties de deux façons :

<u>Première intégration par parties :</u>

Posons :

- $u = \sin(x)$, $u' = \cos(x)$
- $v' = e^{-nx}$, donc $v = \frac{e^{-nx}}{-n}$

Alors :

$$I_n = \left[\frac{-\sin(x)}{n} e^{-nx}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)dx$$

Or :

$$\left[\frac{-\sin(x)}{n} e^{-nx}\right]_0^{\pi} = 0 \quad (\text{car } \sin(0) = \sin(\pi) = 0)$$

Donc :

$$I_n = \frac{1}{n} J_n \quad \text{(première relation à établir)}$$

<u>Deuxième intégration par parties :</u>

- $u = e^{-nx}, \quad u' = -ne^{-nx}$
- $v' = \sin(x), \quad v = -\cos(x)$

Alors :

$$I_n = [-e^{-nx}\cos(x)]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)dx$$

Calcul du premier terme :

$$-e^{-n\pi}\cos(\pi) + e^0\cos(0) = -e^{-n\pi}\cdot(-1) + 1\cdot 1 = e^{-n\pi} + 1$$

Donc :

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{(deuxième relation à établir)}$$

4.b. À partir des deux relations précédentes :

$$I_n = \frac{1}{n} J_n \quad \text{et} \quad I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$$

Remplaçons J_n par nI_n dans la deuxième :

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - n(nI_n) \Rightarrow I_n + n^2 I_n = 1 + e^{-n\pi} \Rightarrow I_n(1 + n^2) = 1 + e^{-n\pi}$$

Donc :

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite déterminer le plus petit rang n tel que $I_n < 0{,}1$.

On utilise l'expression exacte de I_n dans le script Python :

```
from math import *

def seuil() :
    n = 0
    I = 2
    while I >= 0.1 :
        n = n + 1
        I = (1 + exp(-n * pi)) / (n * n + 1)
    return n
```

_____

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.