Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Polynésie– Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (4 points)

Données :

- $A(2,1,-1)$, $B(-1,2,1)$, $C(5,0,-3)$
- Plan $\mathcal{P}$: $x+5y-2z+3=0$
- Droite $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+2 \\ z=2t+1 \end{cases}$

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est-il normal au plan (OAC) ?

On calcule deux vecteurs du plan (OAC) :

- $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$

On vérifie maintenant si ces deux vecteurs sont orthogonaux à $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ en calculant les produits scalaires :

- $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=2\times1+1\times0+(-1)\times2=2+0-2=0$
- $\overrightarrow{OC}\cdot\vec{n}=5\times1+0\times0+(-3)\times2=5+0-6=-1$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OA}$, mais pas à $\overrightarrow{OC}$. Donc, il n'est pas orthogonal à tous les vecteurs du plan, et n'est donc pas normal au plan (OAC).

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 : Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont-elles sécantes au point C ?

On calcule le vecteur $\overrightarrow{AB}=B-A=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$, ce sera le vecteur directeur de la droite (AB).

Vérifions si le point $C(5,0,-3)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$. On cherche un réel t tel que :

$$\begin{cases} -t+3=5 \Rightarrow t=-2 \\ t+2=0 \Rightarrow t=-2 \\ 2t+1=-3 \Rightarrow t=-2 \end{cases}$$

Les trois équations donnent le même $t=-2$, donc le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Voyons maintenant si C appartient à la droite (AB). On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors, on devrait avoir :

$$3 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = -1 - 1 = \lambda \cdot 1 = -1 - 2 = \lambda \cdot 2 = -2$$

Tout est cohérent, donc C appartient à la droite (AB) aussi.

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 : La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan $\mathcal{P}$?

Vecteur directeur de $\mathcal{D}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vecteur normal du plan $\mathcal{P}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Calcul du produit scalaire :

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = -1 + 5 - 4 = 0$$

Donc, le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$. Cela signifie que la droite est parallèle au plan.

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4 : Le plan médiateur du segment [BC] a-t-il pour équation $3x - y - 2z - 7 = 0$?

Calcul du milieu M de [BC] :

$$M = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (2,1,-1)$$

Vecteur $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ce vecteur est normal au plan médiateur. On cherche donc un plan de vecteur normal $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ passant par $(2,1,-1)$.

Équation du plan médiateur :

$$6(x-2) - 2(y-1) - 4(z+1) = 06x - 12 - 2y + 2 - 4z - 4 = 06x - 2y - 4z - 14 = 0$$

Comparons avec l'équation donnée : $3x - y - 2z - 7 = 0$. Il s'agit exactement du même plan, divisé par 2.

L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1. On a l'équation différentielle suivante :

$$(E): y' + 0{,}02y = m$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La méthode classique consiste à :

- Etape 1, résoudre l'équation homogène associée :

$$y' + 0{,}02y = 0$$

qui admet pour solution générale :

$$y_h(t) = k \cdot e^{-0{,}02t}$$

- Etape 2, chercher une solution particulière de l'équation complète $y' + 0{,}02y = m$. Comme le second membre est constant, une solution particulière est une constante $y_p = c$

Alors :

$$y_p' + 0{,}02y_p = 0 + 0{,}02c = m \Rightarrow c = \frac{m}{0{,}02} = 50m$$

Donc, la solution générale est :

$$y(t) = k \cdot e^{-0{,}02t} + 50m$$

Ce qui correspond bien à l'affichage du logiciel :

$$y = k \cdot \exp(-0{,}02t) + 50m$$

2. On a :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 30$$

Or :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} (k \cdot e^{-0{,}02t} + 50m) = 0 + 50m = 50m$$

Donc :

$$50m = 30 \Rightarrow m = \frac{30}{50} = 0{,}6$$

3. On connaît maintenant la valeur de $m = 0{,}6$, donc la solution est :

$$y(t) = k \cdot e^{-0{,}02t} + 50 \cdot 0{,}6 = k \cdot e^{-0{,}02t} + 30$$

On utilise la condition initiale $y(0) = 210$:

$$210 = k \cdot e^{0} + 30 = k + 30 \Rightarrow k = 180$$

Donc :

$$f(t) = 180 \cdot e^{-0{,}02t} + 30$$

Partie B

On reprend : $f(t) = 180 \cdot e^{-0{,}02t} + 30$

1. a. Le graphique montre une intersection vers $T \approx 110$ secondes.

b. On résout $f(T) = 50$:

$$180 \cdot e^{-0{,}02T} + 30 = 50$$

$$\Leftrightarrow 180 \cdot e^{-0{,}02T} = 20$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}02T} = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}02T = \ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln(9)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\ln(9)}{0{,}02}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\ln(3)}{0{,}02} = 100 \cdot \ln(3) \approx 109{,}86$$

2. Valeur moyenne de la température sur l'intervalle $[0; 100]$:

$$\text{Valeur moyenne} = \frac{1}{100}\int_0^{100} f\,(t)\,dt = \frac{1}{100}\int_0^{100} (180 \cdot e^{-0{,}02t} + 30)\,dt$$

On intègre terme à terme :

- $\int_0^{100} 180 \cdot e^{-0{,}02t}\,dt = 180 \cdot \left[\frac{e^{-0{,}02t}}{-0{,}02}\right]_0^{100} = -9000 \cdot (e^{-2} - 1)$
- $\int_0^{100} 30\,dt = 30 \cdot 100 = 3000$

Donc :

$$\int_0^{100} f\,(t)\,dt = -9000(e^{-2}-1)+3000 = 9000(1-e^{-2})+3000$$

Valeur moyenne :

$$\frac{1}{100}(9000(1-e^{-2})+3000) = 90(1-e^{-2})+30 \approx 107{,}82$$

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}\left(n=3, p=\frac{1}{2}\right)$$

car :

- il y a 3 épreuves indépendantes,
- chaque lancer a 2 issues possibles,
- la probabilité d'obtenir Face à chaque lancer est $\frac{1}{2}$.

2. On complète le tableau de la loi de probabilité de X :

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{3}{k}\cdot\frac{1}{8}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

1. Si une seule pièce tombe sur Face au premier lancer (événement A_1), alors deux pièces sont relancées. Pour gagner, il faut que les deux pièces relancées fassent Face.

La probabilité d'obtenir deux Faces avec deux pièces équilibrées est :

$$\mathbb{P}(G \mid A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

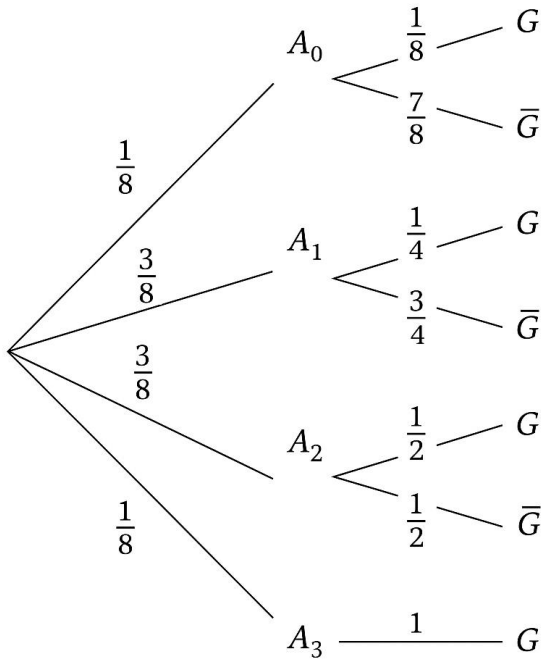
2. On utilise la loi binomiale de la partie A pour les probabilités de A_k :

- $\mathbb{P}(A_0) = \frac{1}{8}$
- $\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{8}$
- $\mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{8}$
- $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{8}$

Probabilités conditionnelles :

- Si A_0 : 3 pièces à relancer → pour gagner : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- Si A_1 : 2 pièces à relancer → pour gagner : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- Si A_2 : 1 pièce à relancer → pour gagner : $\frac{1}{2}$
- Si A_3 : partie gagnée directement

Ce qui donne l'arbre suivant :



3. Probabilité totale de gagner :

$$p = \mathbb{P}(G) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}\left(A_k \cap G\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{12}{64} + \frac{8}{64} = \frac{27}{64}$$

4. La partie est gagnée. On veut connaître la probabilité que exactement une pièce soit tombée sur Face au premier lancer, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(A_1 \mid G) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32}\cdot\frac{64}{27} = \frac{192}{864} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

5. On joue plusieurs parties indépendantes. On veut que la probabilité de gagner au moins une fois dépasse 0,95.

Soit n le nombre de parties jouées.

Alors :

$$\mathbb{P}(\text{au moins un gain}) = 1 - (1-p)^n > 0{,}95 \Rightarrow (1-p)^n < 0{,}05$$

On a $p = \frac{27}{64}$, donc $1 - p = \frac{37}{64}$

On cherche le plus petit entier n tel que :

$$\left(\frac{37}{64}\right)^n < 0{,}05$$

On utilise le logarithme :

$$n \cdot \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0{,}05) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(37/64)} \approx \frac{-2{,}9957}{-0{,}5482} \approx 5{,}47$$

Donc il faut jouer au moins 6 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois dépasse 0,95.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$$

Partie A

1. On complète la fonction Python :

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n):
        u = 4 / (5 - u)
    return u
```

2. Vérification de l'affichage de suite(2) :

On calcule :

- $u_0 = 3$
- $u_1 = \frac{4}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$
- $u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$

Cela correspond bien à l'affichage de suite(2).

3. En analysant les affichages, la suite semble décroissante et converge vers 1.

Partie B

On pose la fonction $f(x) = \frac{4}{5-x}$ définie sur $]-\infty; 5[$. La suite est définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. On calcule la dérivée :

$$f(x) = \frac{4}{5-x} = \frac{0 - 4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2}$$

La dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

Donc, f est strictement croissante sur $]-\infty; 5[$.

2. Montrons par récurrence que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $u_0 = 3$, donc $1 \leq u_1 = \frac{4}{5-3} = 2 \leq 3 = u_0 \leq 4$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

On applique la fonction f qui conserve l'ordre car elle est croissante sur $]-\infty; 5[$.

Ainsi :

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

3. a. Montrons que $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = x \Rightarrow 4 = x(5-x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Donc l'équivalence est démontrée.

b. Résolvons $f(x) = x$ dans $]-\infty; 5[$.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2} = 1 \text{ ou } 4$$

Les deux solutions sont dans l'intervalle $]-\infty; 5[$.

4. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 1, donc convergente par le théorème de convergence monotone.

Sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

Donc ℓ est solution de $x = \frac{4}{5-x} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4$

Mais comme (u_n) est décroissante et $u_0 = 3$, la limite est nécessairement $\ell = 1$

5. Et si on change u_0 pour 4 au lieu de 3 ?

On obtient une suite constante, car :

$$u_1 = \frac{4}{5-4} = 4$$

$$u_2 = \frac{4}{5-4} = 4$$

$$u_3 = etc.$$

Dans ce cas, on a $u_n = 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

_____

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.