Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord

21 mai 2024 Jour 1

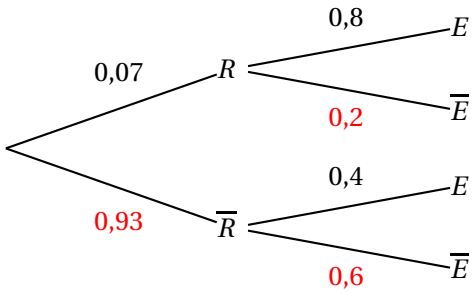
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :
$p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$:



On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales :
$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$.
Or $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$.
Donc $p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428$.

3. On a $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} = \dfrac{56}{428} = \dfrac{14}{107} \approx 0,1308$ soit 0,131 au millième près.

Partie B

1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.
L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$.
2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9838$ soit 0,984 au millième près.
3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p(X \geqslant k+1) = 1 - p(X \leqslant k)$. D'après la calculatrice :
$p(X \geqslant 1+1) = 1 - p(X \leqslant 1) \approx 0,631$, et $p(X \geqslant 2+1) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.
Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.
4. Soit Y la variable correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté N défis Il faut donc trouver Y tel que $p(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 0,05$.
Or $p(X = 0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$0,93^N \leqslant 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leqslant \ln 0,05$ par croissance de la fonction logarithme népérien et enfin $N \geqslant \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$, car $\ln 0,93 < 0$ et son inverse $\dfrac{1}{\ln 0,93}$ aussi.
D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3$.
Conclusion : il faut que $N \geqslant 42$. À partir de 42 succès la probabilité d'obtenir un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.

EXERCICE 2 — 4 points

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).
Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :
On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{AM}} = t\overrightarrow{\text{AB}},\ t \in \mathbb{R} \iff$

$$\begin{cases} x-1 &= 3t \\ y-0 &= 1t \\ z-3 &= -3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= t \\ z &= 3-3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$ Réponse **c.**

On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= 3+4t \\ y &= 6t \\ z &= 4-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Réponse **d**.

3. • Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

• Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+4t &= -2+3k \\ 6t &= -1-2k \\ 4-2t &= 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 4t &= 3k-5 \\ 6t &= -2k-1 \\ -2t &= k-3 \end{cases}$$

Par différence de la ligne 1 et de la ligne 2, on obtient $-2t = 5k-4 = k-3$ (ligne 3) soit $4k = 1 \iff k = \dfrac{1}{4}$, puis comme $-2t = k-3 = \dfrac{1}{4} - 3 = -\dfrac{11}{4}$, d'où $t = \dfrac{11}{8}$, mais la première ligne donne $4t = 3k-5 = \dfrac{3}{4} - 5 = -\dfrac{17}{4}$, d'où $t = \dfrac{17}{8}$: ceci n'est pas possible : les deux droites ne sont pas sécantes.

• Les deux droites ne sont pas confondues : il reste la réponse **b.**

4. Le vecteur $\vec{n}$ vecteur directeur de (d) est un vecteur normal au plan (P) . On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (P) \iff \overrightarrow{\text{IM}} \cdot \vec{n} = 0 \iff 4(x-2)+6(y-1)-2(z-0) = 0 \iff 4x-8+6y-6-2z = 0 \iff 4x+6y-2z-14 = 0 \iff 2x+3y-z-7 = 0$: réponse **a.**

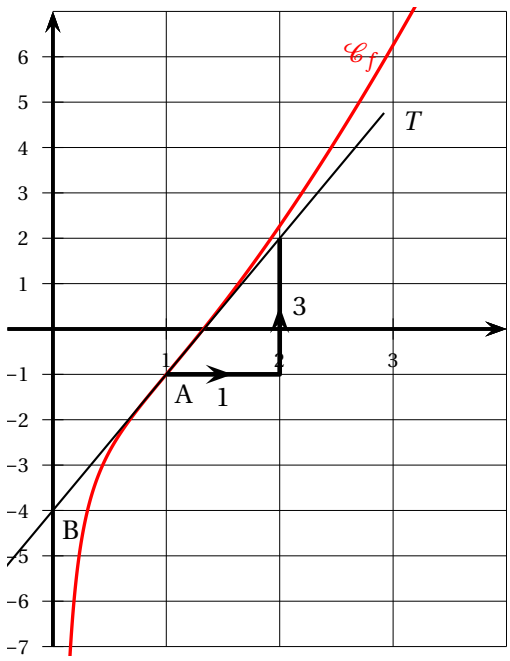
EXERCICE 3 — 5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0\,;\,-4)$.



1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1)$; on lit sur le graphique $f'(1) = \dfrac{3}{1} = 3$.
L'ordonnée à l'origine est égale à -4, donc l'équation réduite de la tangente (T) est

$$M(x\,;\,y) \in (T) \iff y = 3x - 4.$$

2. • il semble que f est concave sur $]0\,;1[$;
• il semble que f est convexe sur $]1\,;+\infty[$.
Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Partie B : étude analytique

1.
• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right) = +\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
• Avec $f(x) = 2x\ln x - \dfrac{1}{x}$, on sait que $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de zéro.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a. Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \ln\left(x^2\right)$ et $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et l'on a :
$f'(x) = \ln\left(x^2\right) + x \times \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = \ln\left(x^2\right) + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ ou $f'(x) = 2\ln x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

b. En dérivant $f'(x)$ on obtient :
$f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x^2-2}{x^3} = \dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^3} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

3. **a.** Comme $x^3 > 0$ sur $]0\,;+\infty[$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x+1)(x-1)$ et comme $x+1>1>0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$.
Conclusion :

- Sur $]0\,;\,1[$, $x<1$, $f''(x)<0$: la fonction est concave ;
- Sur $]1\,;\,+\infty[$, $x>1$, $f''(x)>0$: la fonction est convexe ;
- pour $x=1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : le point A est le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.

b. Du signe de $f''(x)$ on en déduit les variations de f' qui est décroissante sur $]0\,;1[$ puis croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $f'(1)=2+1=3$ (vu à la question **1.**).

Comme 3 est le minimum de f', on en déduit que $f'(x)>0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. **a.** Tableau de variations de f :

x	0		1		2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$		$\nearrow$	
f	‖	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\approx 2{,}27$	$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$						

Sur l'intervalle $]1\,;\,2[$ la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante avec $f(1)<0$ et $f(2)>0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha\in]1\,;\,2[$ tel que $f(\alpha)=0$.

b. La calculatrice donne $f(1{,}3)\approx -0{,}09$ et $f(1{,}4)\approx 0{,}23$ donc $1{,}3<\alpha<1{,}4$, puis $f(1{,}32)\approx -0{,}02$ et $f(1{,}33)\approx 0{,}007$, d'où $1{,}32<\alpha<1{,}33$ et enfin $f(1{,}327)\approx -0{,}003$ et $f(1{,}328)\approx 0{,}0004$, donc $\alpha\approx 1{,}33$ au centième près.

On sait que α est solution de $f(x)=0 \iff x\ln\left(x^2\right)-\dfrac{1}{x}=0 \iff$

$x\ln\left(x^2\right)=\dfrac{1}{x} \iff \ln\left(x^2\right)=\dfrac{1}{x^2}$ et enfin par croissance de la fonction exponentielle :

$\exp\left(\ln\left(x^2\right)\right)=\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \iff x^2=\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

α vérifie cette équation donc $\alpha^2=\exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

EXERCICE 4 — 6 points

$$I_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $I_0=\displaystyle\int_0^{\pi}1\times\sin(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=1+1=2.$

2. **a.** On sait que $0\leqslant x\leqslant\pi\Rightarrow 0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\leqslant\mathrm{e}^{-nx}$ par produit par $\mathrm{e}^{-nx}>0$: la fonction à intégrer étant positive et l'intervalle d'intégration étant croissant on sait que l'intégrale de cette fonction positive est positive. Quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $I_n\geqslant 0$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \mathrm{e}^{-(nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\int_0^\pi \sin x\left[\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-(nx)}\right]\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale, puis
$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin x\mathrm{e}^{-(nx)}\left[\mathrm{e}^{-x} - 1\right]\mathrm{d}x$.
Soit u la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $u(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$.
u est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$. La fonction u est donc décroissante de $\mathrm{e}^{-0} - 1 = 0$ à $\mathrm{e}^{-\pi} - 1 \approx -0,957$.
Comme $\sin x\mathrm{e}^{-(nx)} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$, la fonction à intégrer dans $I_{n+1} - I_n$ est négative et donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. On vient de démontrer que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0 \iff I_{n+1} \leqslant I_n$, c'est-à-dire que la suite (I_n) est décroissante ; étant minorée par zéro elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$.

3. **a.** On a déjà vu que que $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$, donc par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,+\pi]$ on obtient
$\displaystyle\int_0^\pi 0\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-n\pi}\,\mathrm{d}x$.

$$I_n \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

b. Une primitive de e^{-nx}est $\dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$, donc pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^\pi =$
$-\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - \mathrm{e}^0\right] = -\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - 1\right] = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n\pi} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$.
D'après le théorème des « gendarmes » la suite (I_n) a pour limite 0.

4. **a.** • IPP1 On pose :
$u(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v'(x) = \sin x$
$u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v(x) = -\cos x$
On a donc $I_n = [-\mathrm{e}^{-nx}\cos x]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi n\mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n =$
$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n$.
• IPP2 On pose :
$u(x) = \sin x$ $\quad v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$
$u'(x) = \cos x$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$
On a donc $I_n = \left[\dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\sin x\right]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi \cos x\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x =$
$\dfrac{1}{n}J_n$.

b. En égalant les deux valeurs de I_n trouvées on obtient :
$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \dfrac{1}{n}J_n \iff 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} = J_n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$
$\iff J_n\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} \iff J_n = \dfrac{n}{n^2+1} \times [1 + \mathrm{e}^{-n\pi}]$.
En, reportant dans l'expression $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, on obtient finalement :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right] = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n = 0
4      I = 2
5      while I >= 0.1 :
6          n=n+1
7          I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8  return n
```

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.