Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud 21 novembre 2024
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 1

Exercice 1 — 5 points

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$,

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

La fonction linéaire u définie par $u(x) = -\dfrac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\dfrac{1}{4}$.

La fonction composée $g(u(x)) = ax\,\mathrm{e}^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle, $g'(u) = a\,\mathrm{e}^{u(x)} + axu' \times \mathrm{e}^{u(x)} = a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right)$.

Or $g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right) + \dfrac{1}{4} \times ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4} + \dfrac{ax}{4}\right) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

Donc g est solution de l'équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$, si sur cet intervalle :

$a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20$, car quel que soit x réel, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \neq 0$.

La fonction $g : x \longmapsto 20x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 0$,

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

L'équation (E') peut s'écrire $y' = -\dfrac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation (E') sont les fonctions f définies par :

$f(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions f de l'équation (E) sont telles que pour $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ ou d'après la question 1. :

$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{4}[f(x) - g(x)]$ soit par linéarité de la dérivation :

$(f-g)'(x) + \dfrac{1}{4}[(f-g](x) = 0$: ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de (E') c'est-à)dire que

$f(x) - g(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + g(x)$ ou enfin $f(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + 20x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = (20x + K)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ sont donc les fonctions f définies par : $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}(20x+K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

4. On a $f(0) = 8 \iff (20\times 0 + K)\,\mathrm{e}^{\,0} = 8 \iff K = 8$, donc :

$f(x) = (20x+8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 4\,(5x+2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (20x+8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1. **a.** La fonction f est la fonction trouvée à la fin de la partie A : elle est donc dérivable et vérifie l'équation (E), soit

$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ donc

$f'(x) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} - \dfrac{1}{4}\times 4(5x+2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}(20-5x-2) = (18-5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

b. Comme quel que soit x, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $18-5x$:

• $18-5x > 0 \iff \dfrac{18}{5} > x$: sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{18}{5}\right]$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante ;

• $18-5x < 0 \iff \dfrac{18}{5} < x$: sur l'intervalle $\left[\dfrac{18}{5}\,;\,+\infty\right]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante ;

$f'\left(\dfrac{18}{5}\right) = 0$, donc $f\left(\dfrac{18}{5}\right)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On a $f\left(\dfrac{18}{5}\right) = (72+8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times\frac{18}{5}} = 80\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{10}} \approx 32{,}53$.

On a vu à la partie A que $f(0) = 8$, et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	8	↗	$80\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{10}}$	↘	0

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

a. On a $f(14) = 288\,\mathrm{e}^{-3{,}5} \approx 8{,}7$ et $f(15) = 300\,\mathrm{e}^{-3.75} \approx 7{,}2$.

Sur l'intervalle $[14\,;\,15]$, la fonction f est continue car dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, donc sur $[14\,;15]$ et elle est strictement décroissante ; comme $8 \in [f(15)\,;\,f(14)]$, il existe d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α telle que $f(\alpha) = 8$.

b. On complète le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` écrite en langage Python

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m)>8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

c. L'objectif de la fonction `solution_equation` est de déterminer, par dichotomie, un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution de l'équation $f(x)=8$ dans l'intervalle $[14\,;15]$.

Exercice 2 — 6 points

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.

On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

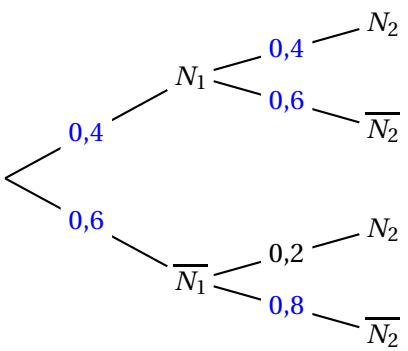
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. **a.** Si on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 1 boule noire et 4 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{\overline{N_1}}(N_2)=\dfrac{1}{5}=0{,}2$.

b. Dans U_1 il y a 4 boules noires et 6 boules blanches donc la probabilité de piocher une boule noire est $P(N_1)=\dfrac{4}{10}=0{,}4$.

Si on a pioché une boule noire dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 2 boules noires et 3 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{N_1}(N_2)=\dfrac{2}{5}=0{,}4$.



2. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est : $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.

3. On cherche la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P\left(\overline{N_1} \cap N_2\right) = 0{,}16 + 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}28$.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2.

La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :

$$P_{N_2}\left(\overline{N_1}\right) = \frac{P\left(N_2 \cap \overline{N_1}\right)}{P(N_2)} = \frac{0{,}12}{0{,}28} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43.$$

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. D'après le texte, on est dans le cas de n répétitions, de façon identique et indépendante, d'une expérience qui n'a que deux issues.

Donc la variable X qui donne le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2, suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}28$.

2. On résout l'inéquation $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$.

$$\begin{aligned}
1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9 &\iff 1 - 0{,}9 \geqslant 0{,}72^n \iff 0{,}1 \geqslant 0{,}7^n \\
&\iff \ln(0{,}1) \geqslant \ln\left(0{,}72^n\right) \quad \left(\text{fonction ln croissante sur } [0\,;+\infty[\right) \\
&\iff \ln(0{,}1) \geqslant n\ln(0{,}72) \\
&\iff \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \leqslant n \quad \left(\ln(0{,}72) < 0\right)
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \approx 7{,}01$ donc le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$ est 8.

3. 0,72 est la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_2.

$0{,}72^n$ est la probabilité de piocher n boules blanches dans l'urne U_2 lors des n tirages.

$1 - 0{,}72^n$ est la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité de piocher au moins une boule noire lors des n tirages.

Il faut donc au moins 8 tirages pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire soit supérieure à 0,9.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Dans l'urne U_1 il y a 10 boules et on en prend 2 simultanément ; il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ tirages possibles.

2. Il y a 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 ; le nombre de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$.

3. On examine les différents cas.

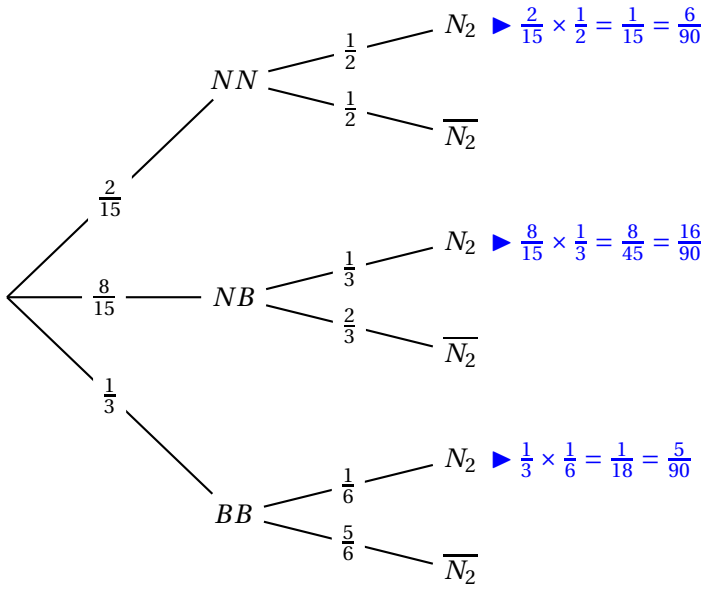
- On a pioché 2 boules noires dans U_1 (événement noté NN).
  - ▷ $P(NN) = \dfrac{\binom{4}{2}}{45} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$
  - ▷ On a mis les 2 boules noires piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches.

    La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
- On a pioché 1 boule noire et 1 boule blanche dans U_1 (événement noté NB).
  - ▷ $P(NB) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$
  - ▷ On a mis les 2 boules, une noire une blanche, piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

    La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
- On a pioché 2 boules blanches dans U_1 (événement noté BB).
  - ▷ $P(BB) = \dfrac{\binom{6}{2}}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$
  - ▷ On a mis les 2 boules blanches piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

    La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{1}{6}$.

On résume la situation dans un arbre pondéré.



La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(N_2) = P(NN \cap N_2) + P(NB \cap N_2) + P(BB \cap N_2) = \frac{6}{90} + \frac{16}{90} + \frac{5}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est égale à 0,3 ; elle est donc supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A qui était de 0,28.

Exercice 3 — 4 points

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout n non nul par $u_n = \dfrac{25 + (-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

Pour tout n non nul, on a : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant +1$ donc $25 - 1 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 25 + 1$ donc $24 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 26$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant \dfrac{25 + (-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{26}{n}$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{26}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{24}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Affirmation 1 fausse

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 &= 1 \\ w_{n+1} &= \dfrac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$n et on considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

Pour tout n, on a : $t_{n+1} = \dfrac{k}{w_{n+1}} = \dfrac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = \dfrac{k(1+w_n)}{w_n} = \dfrac{k + k w_n}{w_n} = \dfrac{k}{w_n} + k = t_n + k$

Donc la suite (t_n) est arithmétique de raison k.

De plus, $k > 0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

Affirmation 2 vraie

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1+v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$,

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $v_n > v_{n+1}$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.

- **Initialisation**

  $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(1+v_0) = \ln(2) \approx 0{,}69$; donc $v_0 > v_1$.
  La propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**

  On suppose que $v_n > v_{n+1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $v_n > v_{n+1}$ donc $1 + v_n > 1 + v_{n+1}$

  Or la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\ln(1+v_n) > \ln(1+v_{n+1})$, ce qui veut dire que $v_{n+1} > v_{n+2}$. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0. Elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a démontré que, pour tout $n \geqslant 0$, on avait : $v_n > v_{n+1}$; donc la suite (v_n) est décroissante.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

$$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^{n+1} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \left[\ln(x)\right]^{n+1} \mathrm{d}x$$

On va calculer I_{n+1} au moyen d'une intégration par parties :
$\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$, et $v(x) = \left[\ln(x)\right]^{n+1}$ donc $v'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times \left[\ln(x)\right]^n$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[x \times \left[\ln(x)\right]^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x \\ &= \left(\mathrm{e}\left[\ln(\mathrm{e})\right]^{n+1} - 1\left[\ln(1)\right]^{n+1}\right) - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (n+1)\,I_n \end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie

Exercice 4 — 5 points

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= 0\\ y &= 1+t\\ z &= 2+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1. On a $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(d_1) \iff$ il existe $t'\in\mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\text{A}M}=t'\overrightarrow{u_1} \iff$

$$\begin{cases} x-1 &= 1t'\\ y-2 &= 2t'\\ z-(-1) &= 0t'\end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 1+t'\\ y &= 2+2t'\\ z &= -1\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

2. On démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

- (d_2) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.
- (d_1) et (d_2) sont sécantes s'il existe t et t' deux réels tels que :

$$\begin{cases} 0 &= 1+t'\\ 1+t &= 2+2t'\\ 2+t &= -1\end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t'\\ t &= 1+2t'\\ t &= -3\end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t'\\ t &= -1\\ t &= -3\end{cases}$$: ce système n'a pas de solution.

Conclusion : les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On va justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

Si un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan défini par le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$, on sait que il existe α et β tels que : $\overrightarrow{\text{A}M}=\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{w}$,

soit avec les coordonnées : $\begin{cases} x-1 &= 1\alpha+2\beta\\ y-2 &= 2\alpha-1\beta\\ z+1 &= 0\alpha+1\beta\end{cases} \iff \begin{cases} x &= \alpha+2\beta+1\\ y &= 2\alpha-\beta+2\\ z &= \beta-1\end{cases}$

Or quels que soient α et β :

$-2(\alpha+2\beta+1)+1(2\alpha-\beta+2)+5(\beta-1)+5=-2\alpha-4\beta-2+2\alpha-\beta+2+5\beta-5+5=0.$

Donc une équation cartésienne du plan est $-2x+1y+5z+5=0$.

4. **a.** On a vu que (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires donc (d_2) ne peut appartenir au plan précédent et (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc la droite (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}$.

Autre méthode : d'après ses équations paramétriques un vecteur directeur de la

droite (d_2)est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et d'après l'équation de $\mathscr{P}$ un de ses vecteurs normaux est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5)\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n}=0+1+5=6\neq 0$ ceci montre que (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$: (d_2) et $\mathscr{P}$ sont donc sécants.

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

Si F est commun à (d_2) et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 0\\ y &= 1+t\\ z &= 2+t\\ -2x+y+5z+5 &= 0\end{cases}$$, d'où en remplaçant dans la dernière équation :

$-2\times 0+1+t+5(2+t)+5=0 \iff 1+t+10+5t+5=0 \iff 6t+16=0 \iff t=-\dfrac{8}{3}$,

d'où en remplaçant dans x, y, et z, on obtient $\text{F}\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5. **a.** Des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ on déduit que :

$\overrightarrow{\text{EF}}\cdot\overrightarrow{u_1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+0=0$ et $\overrightarrow{\text{EF}}\cdot\overrightarrow{u_2}=0-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=0$.

Conclusion : $\overrightarrow{\text{EF}}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites (d_1) et (d_2), $\text{E}\in(d_1)$ et $\text{F}\in(d_2)$ donc EF est bien la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

b. On a $\text{EF}^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{6}{9}$.

Conclusion : $\text{EF}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.