Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat Métropole[1] 19 juin 2024

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4 points**

1. On sait que $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: géométriquement l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de f au voisinage de plus l'infini. L'affirmation 1 est vraie.

On a $f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = e^{-x}(5-5x) = 5e^{-x}(1-x)$.

$f'(x)+f(x) = 5e^{-x}(1-x)+5xe^{-x} = 5e^{-x}$, donc f vérifie l'équation différentielle (E) : l'affirmation 2 est vraie.

2. La suite (v_n) est minorée et majorée mais on ne sait rien de sa monotonie, rien sur sa convergence : l'affirmation 3 est fausse.

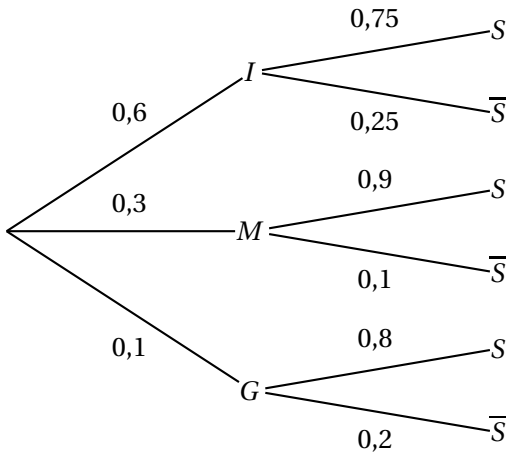
Exemple : $u_n = -1 - \dfrac{1}{n}$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \dfrac{1}{n}$: on ne peut rien dire de la suite (v_n).

Si (u_n) est croissante et (w_n) décroissante, on a donc

$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0$: on a bien l'encadrement considéré : l'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Voici l'arbre pondéré :



2. La probabilité cherchée est $p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

3. On a de même $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.

$p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(S) = p(I \cap S) + p(M \cap S) + p(G \cap S) = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,45 + 0,35 = 0,8$.

1. Antilles-Guyane, Maroc

4. on a $p_S(I) = \dfrac{p(S\cap I)}{p(S)} = \dfrac{p(I\cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,45}{0,8} = \dfrac{45}{80} = \dfrac{9}{16} = 0,5625$, soit 0,563 au millième près.

5. **a.** Les conditions de l'étude sont telles que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

b. D'après la calculatrice $p(X \geqslant 25) = 1 - p(X \leqslant 24) \approx 1 - 0,5725$ soit environ 0,4275, donc 0,428 au millième près.

6. Soit Y la variable aléatoire prenant comme valeurs le nombre de clients satisfaits : elle suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p = 0,8$.

Il faut trouver le plus petit naturel n tel que

$p(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99$, donc tel que $1 - P(Y = n) \geqslant 0,99 \iff P(Y = n) \leqslant 0,01 \iff$

$0,8^n \leqslant 0,01 \iff n\ln 0,8 < \ln 0,01$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)

$\iff n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ car $\ln(0,8) < 0$

Or $\dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 20,6$.

Il faut donc interroger au moins 21 personnes.

7. **a.**

- $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ et T_1 et T_2 sont deux variables indépendantes, donc
- $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.

b. Il faut trouver :

$p(5 \leqslant T \leqslant 9)$ ou encore $p(4 < T < 10) = p(4 - E(T) < T - E(T) < 10 - E(T)) =$

$p(-3 < T - E(T) < 3)$ soit $p(|T - E(T)| < 3)$ ou encore $1 - p(|T - E(T)| \geqslant 3)$ et finalement d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant 1 - \dfrac{V(T)}{3^2}$, soit

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant 1 - \dfrac{3}{9}$ et finalement :

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 3 — 5 points

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{CA}}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{25}{2}\end{pmatrix}$.

Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et :

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{CA}} = 5 - 5 + 0 = 0$ et

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{DC}} = 0 + 0 + 0 = 0$.

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{CAD}) \iff 1x - 1y + 0z + d = 0 \iff x - y + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Ceci est vrai pour exemple pour C :

$C(0\,;\,0\,;\,10) \in (\text{CAD}) \iff 0 - 1y + 0 + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$, soit $d = 0$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{CAD}) \iff x - y = 0$.

2. **a.** Si la droite (D) est sécante au plan (CAD) en un point H les coordonnées de ce point vérifient les équations paramétriques de (D) et celle du plan soit :

$$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z)\in D\cap(\text{CAD}) \iff \begin{cases} x &= &+\frac{5}{2}t \\ y &= &5-\frac{5}{2}t \\ z &= &0t \\ x-y=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 \iff$$

$5t-5=0 \iff t=1$.

Donc $\text{H}\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

b. On a $M(x\,;\,y\,;\,z)\in D \iff \begin{cases} x &= &0+\frac{5}{2}t \\ y &= &5-\frac{5}{2}t \\ z &= &0+0t \end{cases}$

On reconnait dans les coefficients de t les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$ et $(0\,;5\,;0)$ sont les coordonnées de B.

Donc D est la droite contenant B et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.

Or on a vu que le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est normal au plan (CAD), donc la droite D est perpendiculaire à (CAD) au point H.

3. **a.** On a vu que (BH) = D donc a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.

$\overrightarrow{\text{HA}}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\text{HA}}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+0=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{BH}}$ et $\overrightarrow{\text{HA}}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H.

b. On a $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\|^2=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}+0=\frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\|=\text{BH}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ et

$\left|\overrightarrow{\text{HA}}\right\|^2=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}+0=\frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{HA}}\right\|=\text{HA}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\mathscr{A}(\text{ABH})=\frac{\text{BH}\times\text{HA}}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{25\times2}{8}=\frac{25}{4}$.

4. **a.** Les points A, B et H ont une cote nulle : ils appartiennent donc au plan définis par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et C a une abscisse et une ordonnée nulles, donc appartient à l'axe $\left(\text{O},\,\vec{k}\right)$ qui est perpendiculaire au plan (ABH), donc (CO) est la hauteur contenant C du tétraèdre ABCH.

b. De façon évidente CO = 10, donc :

$\mathscr{V}(\text{ABCH})=\frac{\mathscr{A}(\text{ABH})\times\text{CO}}{3}=\frac{\frac{25}{4}\times10}{3}=\frac{125}{6}$.

5. On a $\overrightarrow{\text{BA}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}=0+0+0=0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires, le triangle (ABC) est rectangle en B.

On a $\text{BA}^2=5^2$, donc BA = 5 et $\text{BC}^2=5^2+10^2=25+100=125$, donc $\text{BC}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

L'aire du triangle (ABC) est égale à :

$\mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{\text{AB} \times \text{BC}}{2} = \dfrac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \dfrac{25\sqrt{5}}{2}$.

On a $\mathscr{V}(\text{ABCH}) = \dfrac{\mathscr{A}(\text{ABC}) \times d}{3}$, d étant la distance du point H au plan (ABC).

On a donc : $\dfrac{125}{6} = \dfrac{\dfrac{25\sqrt{5}}{2} \times d}{3} \iff d = \dfrac{125}{6} \times \dfrac{3 \times 2}{25\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A : étude de la fonction f.

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x, \quad \text{sur }]0\,;\,+\infty[$$

1. a.

• Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x - 2 = -2$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

• Limite en plus l'infini :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Sur l'intervalle de définition f est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2x+1}{2x}$.

c. On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x+1$ et
$2x+1 > 2x > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{2x} > 1 > 0$: donc $f'(x) > 1 > 0$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

d. f' est elle-même dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant la somme $1 + \dfrac{1}{2x}$ on obtient :
$f''(x) = 0 + \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2x^2}$.
Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.
Conclusion : la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$

2. a. Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Comme $f(1) = 1 - 2 + 0{,}5 \times \ln 1 = -1$ et
$f(2) = 2 - 2 + \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1\,;2]$ montre que $\alpha \in [1\,;\,2]$.

b. On a donc :

• $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$;

• $f(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$;

• $f(\alpha) = 0$.

c. Le dernier résultat s'écrit :
$\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 0 \iff \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 2 - \alpha \iff \ln\alpha = 2(2-\alpha)$

Partie B étude de la fonction g

Sur $]0\,;\,1]$, $\quad g(x)=-\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x$.

1. g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0\,;\,1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$g'(x)=-2\times\dfrac{7}{8}x+1-\dfrac{1}{4}\left(2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{7}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x-x\dfrac{1}{4}=-\dfrac{8}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x=$

$1-2x-\dfrac{x\ln x}{2}$.

Puisque $x\neq 0$, on peut factoriser x et $g'(x)=x\left(\dfrac{1}{x}-2-\ln x\dfrac{1}{2}\right)$.

Posons $X=\dfrac{1}{x}\iff x=\dfrac{1}{X}$; en remarquant que $X=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\ln X=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$, on peut écrire :

$g'(x)=\dfrac{1}{X}\left(X-2+\dfrac{1}{2}\ln X\right)$, soit $g'(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. **a.** On a vu dans la partie A que $0<x<\alpha\Rightarrow f(x)<0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :

$\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{x}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$.

b. D'après le tableau de signes admis comme $0<x\leqslant 1$ on en déduit par produit que :

- $g'(x)>0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$; g est croissante sur cet intervalle
- $g'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right[$; g est décroissante sur cet intervalle
- $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$; $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est un maximum de g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : un calcul d'aire

1. **a.** On sait que sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\ln x\leqslant 0$ et comme $x^2\geqslant 0$, on conclut que $-\dfrac{1}{4}x^2\ln x\geqslant 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $-\dfrac{7}{8}x^2+x\leqslant-\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g.

b. Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x\longmapsto x^2\ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & x^2 \end{array} \text{ d'où } \begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & \dfrac{x^3}{3} \end{array}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}x^2\ln x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}=$

$-\dfrac{1}{9}-\left(\dfrac{1}{3\alpha^3}\ln\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{9\alpha^3}\right)=-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3\alpha^3}\left(-\ln\alpha-\dfrac{1}{3}\right)$,

soit en remplaçant $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}x^2\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{9}-\frac{1}{3\alpha^3}\left(-4+2\alpha-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9}+\frac{4}{3\alpha^3}-\frac{2}{3\alpha^2}+\frac{1}{9\alpha^3}=$

$\dfrac{-\alpha^3+12-6\alpha+1}{9\alpha^3}=\dfrac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$.

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x\right) \mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \mathrm{d}x$, soit par linéarité de l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(x^2 \ln x\right) \mathrm{d}x,$

soit d'après le calcul précédent :

$\mathscr{A} = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \dfrac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0{,}07.$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.