Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2024 • Amérique du Sud • Jour 2

Code sujet **24-MATJ2AS1** 4 heures

Proposition de corrigé pédagogique • FormaV

Se repérer dans le corrigé

Exercice 1 — Probabilités et groupes sanguins
6 réponses • sujet p. 2–3

Exercice 2 — Suites et équation différentielle — affirmations à justifier
5 réponses • sujet p. 4–4

Exercice 3 — Étude d’une fonction, intégrales et aire
8 réponses • sujet p. 5–5

Exercice 4 — Géométrie dans l’espace et aires des faces d’un tétraèdre
8 réponses • sujet p. 6–6

Les numéros, parties et pages renvoient au sujet original. Chaque réponse rappelle la consigne, explique la démarche et donne le résultat.

Exercice 1

6 points

Probabilités et groupes sanguins

Partie 1

Question 1.

Sujet p. 2, 3

> On note Rh+ l'événement « La personne est de rhésus positif ». Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.

D'après le graphique, les groupes de rhésus positif sont A+, O+, B+ et AB+, avec des proportions respectives de 38,2 %, 36,5 %, 7,7 % et 2,5 %. Ces événements sont incompatibles et leur réunion est l'événement Rh^+. On additionne donc leurs probabilités :

$$P(\mathrm{Rh}^+) = 0{,}382 + 0{,}365 + 0{,}077 + 0{,}025 = 0{,}849.$$

RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'une personne choisie au hasard soit de rhésus positif est $0{,}849$.

Question 2.

Sujet p. 2, 3

> Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que P_Rh+(A) = 0,450 à 0,001 près.

Le groupe A de rhésus positif correspond à l'événement $A \cap \mathrm{Rh}^+$, de probabilité $0{,}382$ d'après le graphique. La probabilité conditionnelle demandée est donc :

$$P_{\mathrm{Rh}^+}(A) = P(A \mid \mathrm{Rh}^+) = \frac{P(A \cap \mathrm{Rh}^+)}{P(\mathrm{Rh}^+)} = \frac{0{,}382}{0{,}849} \approx 0{,}44994.$$

Au millième près, on obtient $0{,}450$.

RÉPONSE À RETENIR

$P_{\mathrm{Rh}^+}(A) \approx 0{,}450$ au millième près.

Question 3.

Sujet p. 2, 3

> Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus. Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

On cherche la probabilité d'être de rhésus négatif sachant que la personne est de groupe AB. D'après le graphique, les proportions de AB− et AB+ sont respectivement $0{,}004$ et $0{,}025$. Parmi les personnes de groupe AB, la proportion de celles de rhésus négatif vaut donc :

$$P(\mathrm{Rh}^- \mid AB) = \frac{P(AB^-)}{P(AB^-) + P(AB^+)} = \frac{0{,}004}{0{,}004 + 0{,}025} = \frac{4}{29} \approx 0{,}13793.$$

RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que son rhésus soit négatif est $\frac{4}{29}$, soit $0{,}138$ au millième près.

Partie 2

Question 1.a.

Sujet p. 3

> On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels. Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse. Les résultats seront arrondis à 0,001 près.

La probabilité qu'une personne soit donneur universel est $p = 0{,}065$. En modélisant les choix des 50 personnes par des épreuves indépendantes de même probabilité, le nombre X de donneurs universels suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0{,}065)$. La probabilité d'en obtenir exactement 8 est :

$$P(X = 8) = \binom{50}{8} (0{,}065)^8 (1 - 0{,}065)^{42} = \binom{50}{8} (0{,}065)^8 (0{,}935)^{42} \approx 0{,}01015.$$

On arrondit cette valeur au millième.

RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que exactement 8 des 50 personnes soient des donneurs universels est $P(X = 8) \approx 0{,}010$ au millième près.

Question 1.b.

Sujet p. 3

> La fonction proba d'argument k, écrite en langage Python, utilise la fonction binomiale d'arguments i, n et p, qui renvoie la probabilité P(X = i) lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction proba lorsqu'on saisit proba(8) dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. Les résultats seront arrondis à 0,001 près.

La boucle de la fonction additionne les probabilités $P(X = i)$ pour tous les entiers i de 0 à 8 inclus. Elle renvoie donc $P(X \leq 8)$, et non uniquement $P(X = 8)$:

$$\texttt{proba(8)} = \sum_{i=0}^{8} \binom{50}{i} (0{,}065)^i (0{,}935)^{50-i} \approx 0{,}99545.$$

Il s'agit de la probabilité qu'au plus 8 des 50 personnes choisies soient des donneurs universels.

RÉPONSE À RETENIR

La fonction renvoie environ $0{,}995$ au millième près. Cela signifie qu'il y a environ $99{,}5\,\%$ de chances qu'au plus 8 des 50 personnes soient des donneurs universels.

Question 2.

Sujet p. 3

> Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel soit supérieure à 0,999 ? Les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Pour n personnes choisies, la probabilité qu'aucune ne soit donneur universel est $0{,}935^n$, en supposant les choix indépendants. Par complément, la probabilité qu'au moins une personne soit donneur universel vaut $1 - 0{,}935^n$. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$1 - 0{,}935^n > 0{,}999 \quad \iff \quad 0{,}935^n < 0{,}001.$$

Comme $0{,}935$ est compris entre 0 et 1, la prise des logarithmes conduit à $n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \approx 102{,}78$. Le plus petit entier candidat est donc 103. En effet, $0{,}935^{102} \approx 0{,}001054 > 0{,}001$, tandis que $0{,}935^{103} \approx 0{,}000986 < 0{,}001$.

RÉPONSE À RETENIR

Le nombre minimal de personnes à choisir est 103.

Exercice 2

5 points

Suites et équation différentielle — affirmations à justifier

Partie 1

Question 1.

Sujet p. 4

> On considère la suite (u_n) définie par u_0 = 10 et, pour tout entier naturel n, u_(n+1) = (1/3)u_n + 2. Affirmation 1 : « La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0. » Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

Le point fixe de la relation de récurrence vérifie $\frac{1}{3}x + 2 = x$, donc il vaut 3. Montrons par récurrence que $u_n > 3$ pour tout entier naturel n. C'est vrai au rang 0 puisque $u_0 = 10 > 3$. Si $u_n > 3$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 > \frac{1}{3} \cdot 3 + 2 = 3$. Ainsi, $u_n > 3$ pour tout n. De plus, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{2}{3}(3 - u_n) < 0$. La suite est donc strictement décroissante et, puisqu'elle est toujours supérieure à 3, elle est minorée par 0.

RÉPONSE À RETENIR

VRAI. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Question 2.

Sujet p. 4

> On considère la suite (u_n) définie par u_0 = 10 et, pour tout entier naturel n, u_(n+1) = (1/3)u_n + 2. Affirmation 2 : « lim_(n→+∞) u_n = 0. » Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

Posons $v_n = u_n - 3$. Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$, et $v_0 = 7$. Ainsi, $v_n = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc $u_n = 3 + 7\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

RÉPONSE À RETENIR

FAUX. La limite de (u_n) est 3, et non 0.

Question 3.

Sujet p. 4

> On considère la suite (u_n) définie par u_0 = 10 et, pour tout entier naturel n, u_(n+1) = (1/3)u_n + 2. Affirmation 3 : « La suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par v_n = u_n − 3, est géométrique. » Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

Pour tout entier naturel n, la relation de récurrence donne $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 7$.

RÉPONSE À RETENIR

VRAI. (v_n) est une suite géométrique de premier terme 7 et de raison $\frac{1}{3}$.

Partie 2

Question 1.

Sujet p. 4

> On considère l'équation différentielle (E) : y' = (3/2)y + 2, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Affirmation 4 : « Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E). » Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

Si une fonction constante $y(x) = c$ est solution, alors $y'(x) = 0$ et l'équation différentielle impose $0 = \frac{3}{2}c + 2$. Cette équation admet la solution $c = -\frac{4}{3}$. La fonction constante égale à $-\frac{4}{3}$ vérifie donc bien l'équation différentielle.

RÉPONSE À RETENIR

VRAI. La fonction constante $y(x) = -\frac{4}{3}$ est une solution.

Question 2.

Sujet p. 4

> Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), on note C_f la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que f(0) = 0. Affirmation 5 : « La tangente au point d'abscisse 1 de C_f a pour coefficient directeur 2e^(3/2). » Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

Une solution particulière constante de l'équation est $-\frac{4}{3}$, et les solutions de l'équation homogène associée $y' = \frac{3}{2}y$ sont de la forme $Ce^{3x/2}$. Ainsi, $f(x) = Ce^{3x/2} - \frac{4}{3}$. La condition $f(0) = 0$ donne $C = \frac{4}{3}$, donc $f(x) = \frac{4}{3}(e^{3x/2} - 1)$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est $f'(1)$. En utilisant l'équation différentielle, $f'(1) = \frac{3}{2}f(1) + 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}(e^{3/2} - 1) + 2 = 2(e^{3/2} - 1) + 2 = 2e^{3/2}$.

RÉPONSE À RETENIR

VRAI. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est $2e^{3/2}$.

Exercice 3

5 points

Étude d'une fonction, intégrales et aire

Partie 1

Question 1.

Sujet p. 5

> On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = (x² − 4)e^(−x). Déterminer les limites de la fonction f en −∞ et en +∞.

On a $f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$. Lorsque $x \to -\infty$, posons $t = -x$: alors $t \to +\infty$ et $f(x) = (t^2 - 4)e^{t}$, qui tend vers $+\infty$.

Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) = (x^2 - 4)/e^{x}$. L'exponentielle croît plus rapidement que tout polynôme, donc ce quotient tend vers 0. Pour $x > 2$, il est positif.

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Question 2.

Sujet p. 5

> On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = (x² − 4)e^(−x). Justifier que, pour tout réel x, f'(x) = (−x² + 2x + 4)e^(−x).

On dérive le produit $(x^2 - 4)e^{-x}$. Comme $(x^2 - 4)' = 2x$ et $(e^{-x})' = -e^{-x}$, la formule de dérivation d'un produit donne :

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 4)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}.$$

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}}$.

Question 3.

Sujet p. 5

> En déduire les variations de la fonction f sur ℝ.

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 + 2x + 4$. Ce trinôme s'annule en $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$. Son coefficient dominant étant négatif, il est négatif à l'extérieur de ces racines et positif entre elles.

Ainsi, f décroît, puis croît, puis décroît. Aux points critiques, $x^2 = 2x + 4$, donc $f(x) = 2xe^{-x}$. Les limites aux bornes des intervalles sont celles établies à la question précédente.

Intervalle ou point	$]-\infty, 1-\sqrt{5}[$	$1-\sqrt{5}$	$]1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}[$	$1+\sqrt{5}$	$]1+\sqrt{5}, +\infty[$
Signe de f'	$-$	0	$+$	0	$-$
Variation de f	Décroissante	Minimum : $2(1-\sqrt{5})e^{\sqrt{5}-1}$	Croissante	Maximum : $2(1+\sqrt{5})e^{-1-\sqrt{5}}$	Décroissante

RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est décroissante sur $]-\infty, 1-\sqrt{5}]$, croissante sur $[1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$, puis décroissante sur $[1+\sqrt{5}, +\infty[$.

Partie 2

Question 1.

Sujet p. 5

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par I_n = ∫ de −2 à 0 de x^n e^(−x) dx. Justifier que I_0 = e² − 1.

Pour $n = 0$, on a $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx$. Une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$. Ainsi :

$$I_0 = [-e^{-x}]_{-2}^{0} = -1 - (-e^{2}) = e^{2} - 1.$$

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{I_0 = e^2 - 1}$.

Question 2.

Sujet p. 5

En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité I_(n+1) = (−2)^(n+1)e² + (n + 1)I_n.

Dans $I_{n+1} = \int_{-2}^{0} x^{n+1}e^{-x}\,dx$, effectuons une intégration par parties avec $u = x^{n+1}$ et $dv = e^{-x}\,dx$. Alors $du = (n+1)x^{n}\,dx$ et $v = -e^{-x}$. On obtient :

$$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_{-2}^{0} + (n+1)\int_{-2}^{0} x^{n}e^{-x}\,dx.$$

Le terme aux bornes vaut $0 - [-(-2)^{n+1}e^{2}] = (-2)^{n+1}e^{2}$, et l'intégrale restante est I_n. D'où la relation demandée.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier naturel n, $\boxed{I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^{2} + (n+1)I_n}$.

Question 3.

Sujet p. 5

En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Avec la relation de récurrence et $I_0 = e^2 - 1$, pour $n = 0$:

$$I_1 = (-2)e^{2} + I_0 = -2e^{2} + (e^{2} - 1) = -e^{2} - 1.$$

Puis, pour $n = 1$:

$$I_2 = (-2)^{2}e^{2} + 2I_1 = 4e^{2} + 2(-e^{2} - 1) = 2e^{2} - 2.$$

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{I_1 = -e^2 - 1}$ et $\boxed{I_2 = 2e^2 - 2}$.

Partie 3

Question 1.

Sujet p. 5

> Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.

Pour tout réel x, le facteur e^{-x} est strictement positif. Le signe de $f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$ est donc celui de $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Ce produit est positif à l'extérieur des racines -2 et 2, négatif entre elles, et nul aux racines.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(x) > 0$ sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, $f(x) = 0$ pour $x = -2$ et $x = 2$, et $f(x) < 0$ sur $]-2, 2[$.

Question 2.

Sujet p. 5

> La courbe C_f de la fonction f est représentée dans un repère orthonormé. Le domaine D du plan hachuré sur la figure est délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.

Le domaine D est délimité par la courbe, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées : il s'étend de l'intersection avec l'axe des abscisses en $x = -2$ jusqu'à l'axe des ordonnées en $x = 0$. Sur $[-2, 0]$, $f \leq 0$, d'après son expression et son signe. L'aire est donc l'opposé de l'intégrale de f sur cet intervalle :

$$S = -\int_{-2}^{0} (x^2 - 4)e^{-x}\,dx = -(I_2 - 4I_0).$$

En remplaçant par les valeurs exactes obtenues précédemment :

$$S = -\big((2e^2 - 2) - 4(e^2 - 1)\big) = 2e^2 - 2.$$

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{S = 2e^2 - 2}$ unités d'aire.

Exercice 4

5 points

Géométrie dans l'espace et aires des faces d'un tétraèdre

Partie 1

Question 1.

Sujet p. 6

> Dans un repère orthonormé, on considère A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2). Démontrer que le vecteur n⃗(2 ; 3 ; 3) est normal au plan (ABC).

Pour établir que $\vec{n} = (2; 3; 3)$ est normal au plan (ABC), on vérifie qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan. On calcule $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 2)$. Alors :

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(-3) + 3(2) + 3(0) = 0$, et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(-3) + 3(0) + 3(2) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (ABC). Ainsi, $\vec{n}$ est normal à ce plan.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{\vec{n} = (2; 3; 3) \text{ est normal au plan } (ABC).}$

Question 2.

Sujet p. 6

> Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est 2x + 3y + 3z − 6 = 0.

Comme $(2; 3; 3)$ est un vecteur normal au plan, une équation de celui-ci est de la forme $2x + 3y + 3z + d = 0$. Le point $A(3; 0; 0)$ appartient au plan, donc $2 \times 3 + d = 0$, d'où $d = -6$.

L'équation obtenue est bien vérifiée par $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 2)$ également. Les trois points ne sont pas alignés ; cette équation caractérise donc le plan (ABC).

RÉPONSE À RETENIR

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $\boxed{2x + 3y + 3z - 6 = 0}$.

Question 3.

Sujet p. 6

> Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur n⃗.

La droite d passe par $O(0; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n} = (2; 3; 3)$. Ses points ont donc pour coordonnées $O + t\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

RÉPONSE À RETENIR

Une représentation paramétrique de d est $\boxed{\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$

Question 4.

Sujet p. 6

> On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC). Déterminer les coordonnées du point H.

Un point de d a pour coordonnées $(2t; 3t; 3t)$. Pour trouver l'intersection avec le plan (ABC), on remplace ces coordonnées dans son équation :

$2(2t) + 3(3t) + 3(3t) - 6 = 0$, soit $22t - 6 = 0$. On obtient $t = \dfrac{3}{11}$.

En reportant cette valeur dans la représentation paramétrique de d, on obtient les coordonnées de H.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{H\left(\dfrac{6}{11}; \dfrac{9}{11}; \dfrac{9}{11}\right)}$.

Question 5.

Sujet p. 6

> En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à 3√22/11.

La droite d est dirigée par un vecteur normal au plan (ABC), donc elle est perpendiculaire à ce plan. Comme H est son point d'intersection avec le plan, la distance de O au plan est OH.

À partir des coordonnées de H :

$$OH = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{198}{121}} = \frac{\sqrt{198}}{11} = \frac{3\sqrt{22}}{11}.$$

RÉPONSE À RETENIR

La distance du point O au plan (ABC) est $\boxed{\dfrac{3\sqrt{22}}{11}}$.

Partie 2

Question 1.

Sujet p. 6

> Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.

On choisit le triangle OAB comme base. Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = (3; 0; 0)$ et $\overrightarrow{OB} = (0; 2; 0)$ sont orthogonaux, donc l'aire de OAB est $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$. Le plan (OAB) a pour équation $z = 0$, et la distance de $C(0; 0; 2)$ à ce plan est 2. La formule du volume du tétraèdre donne alors $V = \dfrac{1}{3} \times 3 \times 2 = 2$.

RÉPONSE À RETENIR

Le volume du tétraèdre $OABC$ est $\boxed{2}$.

Question 2.

Sujet p. 6

> En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à √22.

En prenant ABC comme base, la hauteur relative est la distance de O au plan (ABC), soit $h = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$. La formule du volume donne $2 = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}(ABC)\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$. Ainsi, $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{6}{3\sqrt{22}/11} = \dfrac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$.

RÉPONSE À RETENIR

L'aire du triangle ABC est $\boxed{\sqrt{22}}$.

Question 3.

Sujet p. 6

> Démontrer que, pour le tétraèdre OABC, le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par V = (1/3) × B × h, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

Les trois autres faces sont OAB, OAC et OBC. Chacune est rectangle en O, car les axes du repère sont deux à deux perpendiculaires. Leurs aires sont donc :

$\mathcal{A}(OAB) = \dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$, $\mathcal{A}(OAC) = \dfrac{OA \times OC}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$, et $\mathcal{A}(OBC) = \dfrac{OB \times OC}{2} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$.

La somme des carrés de ces aires vaut $3^2 + 3^2 + 2^2 = 22$. D'après la question précédente, $\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{22}$, donc $\mathcal{A}(ABC)^2 = 22$. Les deux quantités sont égales, ce qui démontre la propriété demandée.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{\mathcal{A}(ABC)^2 = \mathcal{A}(OAB)^2 + \mathcal{A}(OAC)^2 + \mathcal{A}(OBC)^2}$, les deux membres étant égaux à 22.

Sujet : https://www.sujetdebac.fr/annales-pdf/2024/spe-mathematiques-2024-amerique-sud-2-sujet-officiel.pdf
© FormaV EI • Proposition de correction, distincte d'un corrigé officiel.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.