Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2024 • Asie • Jour 2

Code sujet **24-MATJ2JA1** 4 heures

Proposition de corrigé pédagogique • FormaV

Se repérer dans le corrigé

Exercice 1 — Étude d’une fonction, d’une fonction auxiliaire et d’une suite récurrente
10 réponses • sujet p. 2–2

Exercice 2 — Probabilités de victoire et étude d’une suite récurrente
11 réponses • sujet p. 3–4

Exercice 3 — Vrai ou faux : suites, convexité, dénombrement et équation différentielle
4 réponses • sujet p. 5–5

Exercice 4 — Rapport des aires d’un triangle et de son projeté orthogonal dans un plan
10 réponses • sujet p. 6–6

Les numéros, parties et pages renvoient au sujet original. Chaque réponse rappelle la consigne, explique la démarche et donne le résultat.

Exercice 1

5.5 points

Étude d'une fonction, d'une fonction auxiliaire et d'une suite récurrente

Partie A

Question 1.

Sujet p. 2

> On considère f définie sur]0 ; +∞[par f(x)=x²−x ln(x). Déterminer les limites de f en 0 et en +∞.

Quand $x \to 0^+$, on a $x^2 \to 0$ et $x \ln x \to 0$. En effet, en posant $t = 1/x$, on obtient $x \ln x = -\frac{\ln t}{t}$, qui tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Donc $f(x) = x^2 - x \ln x \to 0$.

Quand $x \to +\infty$, on écrit $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\frac{\ln x}{x} \to 0$, le facteur entre parenthèses tend vers 1, et $x^2 \to +\infty$.

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Question 2.

Sujet p. 2

> Pour tout réel x strictement positif, calculer f′(x).

Pour $x > 0$, la dérivée de x^2 est $2x$. Par la règle du produit, $(x \ln x)' = \ln x + 1$. Ainsi, $f'(x) = 2x - (\ln x + 1)$.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x > 0$, $\boxed{f'(x) = 2x - \ln x - 1}$.

Question 3.

Sujet p. 2

> Montrer que, pour tout réel x strictement positif, f″(x)=(2x−1)/x.

En dérivant l'expression de f', on obtient $f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$. En mettant au même dénominateur, on retrouve l'expression demandée.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x > 0$, $\boxed{f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x - 1}{x}}$.

Question 4.

Sujet p. 2

> Étudier les variations de la fonction f′ sur]0 ; +∞[, puis dresser le tableau des variations de f′ sur]0 ; +∞[. Faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de f′. Les limites de f′ aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

Pour tout $x > 0$, le dénominateur x de $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$ est positif. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $2x - 1$: il est négatif sur $]0, \frac{1}{2}[$, nul en $\frac{1}{2}$, puis positif sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Comme f'' est la dérivée de f', la fonction f' décroît puis croît. Elle admet donc un minimum en $x = \frac{1}{2}$. Sa valeur est $f'(\frac{1}{2}) = 1 - \ln(\frac{1}{2}) - 1 = \ln 2$.

x	$]0, \frac{1}{2}[$	$\frac{1}{2}$	$]\frac{1}{2}, +\infty[$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f'	Décroissante	Minimum : $\ln 2$	Croissante

RÉPONSE À RETENIR

La fonction f' est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$, puis croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Son minimum exact est $\boxed{f'(\frac{1}{2}) = \ln 2}$.

Question 5.

Sujet p. 2

Montrer que la fonction f est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

D'après la question précédente, $f'(x) \geq \ln 2$ pour tout $x > 0$. Or $\ln 2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. Une fonction dérivable dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle y est strictement croissante.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$

Partie B

Question 1.

Sujet p. 2

La fonction g est définie sur]0 ; +∞[par g(x)=x−ln(x). Pour tout réel x strictement positif, calculer g′(x), puis dresser le tableau des variations de g. Les limites de g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

Pour $x > 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$: négatif si $0 < x < 1$, nul si $x = 1$, positif si $x > 1$. La fonction g décroît donc jusqu'à 1, puis croît. Elle atteint son minimum en 1, et $g(1) = 1$.

x	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g	Décroissante	Minimum : 1	Croissante

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x > 0$, $\boxed{g'(x) = \dfrac{x-1}{x}}$. La fonction g décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, et son minimum vaut $\boxed{g(1) = 1}$.

Question 2.

Sujet p. 2

On admet que 1 est l'unique solution de l'équation g(x)=1. Résoudre, sur l'intervalle]0 ; +∞[, l'équation f(x)=x.

Pour $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ équivaut, après division par x, à $x - \ln x = 1$, c'est-à-dire $g(x) = 1$. D'après l'énoncé, cette équation a pour unique solution $x = 1$. Cette valeur vérifie bien l'équation initiale, puisque $f(1) = 1$.

RÉPONSE À RETENIR

L'unique solution de $f(x) = x$ sur $]0, +\infty[$ est $\boxed{x = 1}$.

Partie C

Question 1.

Sujet p. 2

La suite (u_n) est définie par $u_0=1/2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)=u_n^2-u_n \ln(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1/2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Des résultats précédents, on sait que f est strictement croissante et que $g(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$. Or $f(x) - x = x\big(g(x) - 1\big)$, donc $f(x) \geq x$ pour tout $x > 0$.

Initialisation. On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. De plus, $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt > \frac{1}{2}$, donc $u_1 > \frac{1}{2} = u_0$. Comme f est strictement croissante et $\frac{1}{2} < 1$, $u_1 = f(\frac{1}{2}) < f(1) = 1$. Ainsi, $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

Hérédité. Supposons que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Comme $u_{n+1} > 0$ et $f(x) \geq x$, on a $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq u_{n+1}$. De plus, $u_{n+1} \leq 1$ et la croissance de f donnent $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(1) = 1$. Il en résulte que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$. La propriété est donc héréditaire.

Par récurrence, l'encadrement demandé est vrai pour tout entier naturel n.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier naturel n, $\boxed{\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}$.

Question 2.

Sujet p. 2

Justifier que la suite (u_n) converge.

D'après la question précédente, (u_n) est croissante puisque $u_n \leq u_{n+1}$, et majorée par 1. Toute suite croissante et majorée converge.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

Question 3.

Sujet p. 2

On appelle l la limite de la suite (u_n) et on admet que l vérifie l'égalité f(l)=l. Déterminer la valeur de l.

La suite étant minorée par $\frac{1}{2}$, sa limite l appartient à $]0, +\infty[$. Elle vérifie $f(l) = l$. Or la partie B a établi que l'unique solution de cette équation sur $]0, +\infty[$ est 1.

RÉPONSE À RETENIR

La limite de la suite est $\boxed{l = 1}$.

Exercice 2

5.5 points

Probabilités de victoire et étude d'une suite récurrente

Question 1.

Sujet p. 3

> Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle P_{G₁}(D₂) ?

Après une victoire, Léa gagne la partie suivante avec une probabilité de 0,7. Gagner et perdre la deuxième partie sont des événements complémentaires. Ainsi, conditionnellement à la victoire de la première partie :

$P_{G_1}(D_2) = 1 - P_{G_1}(G_2) = 1 - 0,7 = 0,3.$

RÉPONSE À RETENIR

$P_{G_1}(D_2) = 0,3.$

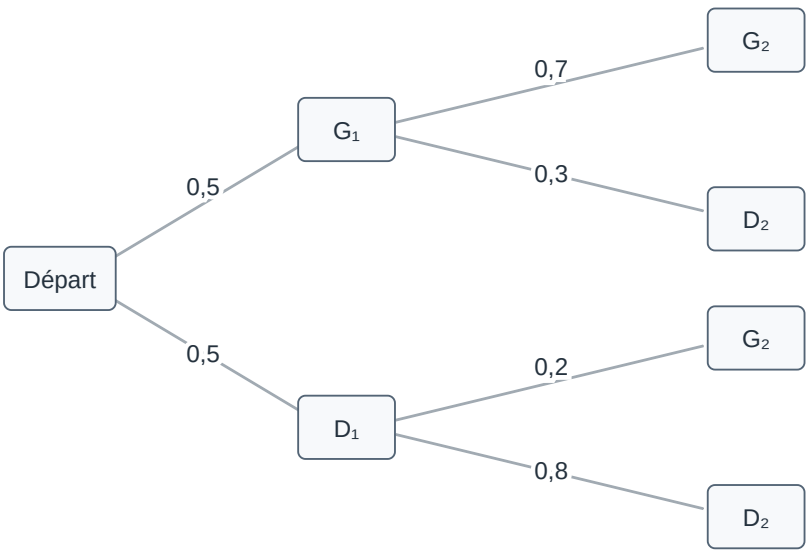
Question 2.

Sujet p. 3

> Recopier et compléter l'arbre des probabilités qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée.

On a $P(G_1) = g_1 = 0,5$, donc $P(D_1) = 1 - 0,5 = 0,5$. Après une victoire, les probabilités de gagner et de perdre la partie suivante sont respectivement 0,7 et 0,3. Après une défaite, elles sont respectivement 0,2 et 0,8. Ces probabilités sont portées sur les branches de l'arbre.

Résultats des deux premières parties



Les nombres inscrits sur les branches sont les probabilités associées à ces branches.

RÉPONSE À RETENIR

L'arbre complété est représenté ci-dessous.

Question 3.

Sujet p. 3

> Calculer g_2.

Pour gagner la deuxième partie, Léa peut gagner les deux parties, ou perdre la première puis gagner la deuxième. Comme G_1 et D_1 forment une partition, la formule des probabilités totales donne :

$g_2 = P(G_1)P_{G_1}(G_2) + P(D_1)P_{D_1}(G_2)$.

Donc $g_2 = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 = 0,35 + 0,10 = 0,45$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g_2 = 0,45$.

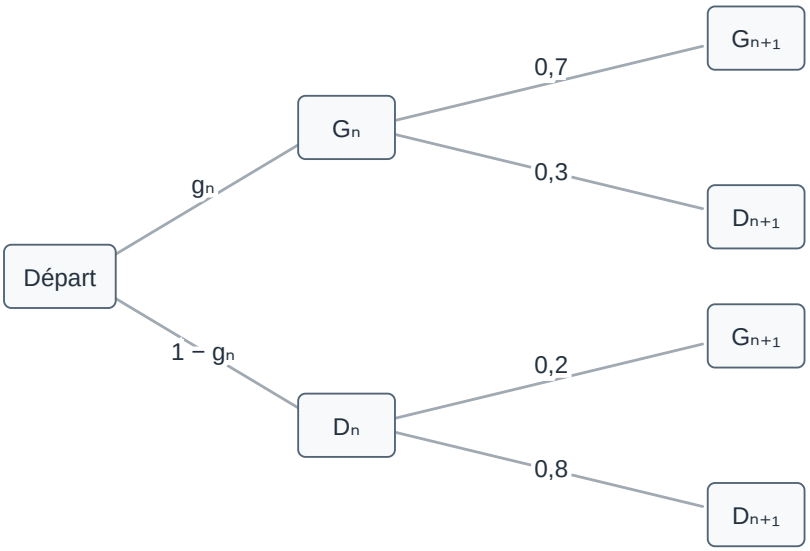
Question 4.a

Sujet p. 3, 4

> Soit n un entier naturel non nul. Recopier et compléter l'arbre des probabilités qui modélise la situation pour les n-ième et (n+1)-ième parties de la journée.

Les événements G_n et D_n sont complémentaires : leurs probabilités sont respectivement g_n et $1 - g_n$. Si Léa gagne la n-ième partie, elle gagne la suivante avec probabilité 0,7 et la perd avec probabilité 0,3. Si elle perd la n-ième partie, elle gagne la suivante avec probabilité 0,2 et la perd avec probabilité 0,8.

Résultats des parties n et n + 1



Au premier embranchement figurent les probabilités de G_n et D_n ; aux embranchements suivants, les probabilités conditionnelles liées au résultat de la n-ième partie.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'arbre complété est représenté ci-dessous.

Question 4.b

Sujet p. 3, 4

> Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1}=0{,}5g_n+0{,}2$.

Les événements G_n et D_n forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$g_{n+1} = P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(G_{n+1})$.

Or $P(G_n) = g_n$, $P(D_n) = 1 - g_n$, $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,7$ et $P_{D_n}(G_{n+1}) = 0,2$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$g_{n+1} = 0,7g_n + 0,2(1 - g_n) = 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n = 0,5g_n + 0,2$.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier naturel non nul n, $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$.

Question 5.a

Sujet p. 3, 4

> Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n=g_n-0{,}4$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

À l'aide de la relation de récurrence et de la définition $v_n = g_n - 0,4$, calculons :

$v_{n+1} = g_{n+1} - 0,4 = 0,5g_n + 0,2 - 0,4 = 0,5(g_n - 0,4) = 0,5v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5. Son premier terme est $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$.

RÉPONSE À RETENIR

(v_n) est géométrique, de premier terme $v_1 = 0,1$ et de raison $0,5$.

Question 5.b

Sujet p. 3, 4

> Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $g_n=0{,}1\times0{,}5^{n-1}+0{,}4$.

La suite géométrique (v_n), de premier terme $v_1 = 0,1$ et de raison 0,5, vérifie pour tout $n \geq 1$:

$v_n = v_1 \times 0,5^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$.

Comme $g_n = v_n + 0,4$, on obtient la formule demandée.

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier naturel non nul n, $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

Question 6.

Sujet p. 3, 4

> Étudier les variations de la suite (g_n).

À partir de la formule explicite, calculons la différence de deux termes consécutifs, pour tout $n \geq 1$:

$g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^n - 0,1 \times 0,5^{n-1} = -0,05 \times 0,5^{n-1}$.

Cette différence est strictement négative puisque $0,5^{n-1} > 0$. La suite (g_n) est donc strictement décroissante.

RÉPONSE À RETENIR

La suite (g_n) est strictement décroissante.

Question 7.

Sujet p. 3, 4

> Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

On a, pour tout $n \geq 1$, $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$. Puisque $0 < 0,5 < 1$, $0,5^{n-1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent, g_n tend vers 0,4.

Dans le contexte de l'énoncé, selon les estimations de Léa, lorsque le nombre de parties augmente, la probabilité de gagner une partie se rapproche de 0,4, soit 40 %.

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 0,4$. À long terme, la probabilité de gagner une partie se rapproche de 40 %.

Question 8.

Sujet p. 3, 4

> Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

La formule explicite donne $g_n - 0,4 = 0,1 \times 0,5^{n-1}$. On cherche le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001$, soit $0,5^{n-1} \leq 0,01$.

En prenant les logarithmes, puis en divisant par $\ln(0,5) < 0$, ce qui inverse le sens de l'inégalité, on obtient $n - 1 \geq \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \approx 6,644$. Ainsi $n \geq 7,644$, et le plus petit entier possible est 8. Vérification : pour $n = 8$, $g_8 - 0,4 = 0,1 \times 0,5^7 = 0,00078125 \leq 0,001$, tandis que pour $n = 7$, $g_7 - 0,4 = 0,1 \times 0,5^6 = 0,0015625 > 0,001$.

RÉPONSE À RETENIR

Le plus petit entier recherché est $n = 8$.

Question 9.

Sujet p. 3, 4

> Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction écrite en langage Python afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à 0,4+e, où e est un nombre réel strictement positif.

La variable g contient le terme courant, initialisé à $g_1 = 0,5$, et n son rang, initialisé à 1. Tant que le terme courant dépasse $0,4 + e$, on calcule le terme suivant avec la relation de récurrence et on augmente son rang de 1. Comme $e > 0$ et que g_n converge vers 0,4, la boucle finit par s'arrêter.

Les lignes 4, 5 et 6 sont :

```
    while g > 0.4 + e:
        g = 0.5*g + 0.2
        n = n + 1
```

RÉPONSE À RETENIR

La fonction complétée est :

```
def seuil(e):
    g = 0.5
    n = 1
    while g > 0.4 + e:
        g = 0.5*g + 0.2
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 3

4 points

Vrai ou faux : suites, convexité, dénombrement et équation différentielle

Question 1.

Sujet p. 5

> Pour chacune des affirmations de l'exercice, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Soit (uₙ) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant, pour tout n, 1/2<uₙ≤(3n²+4n+7)/(6n²+1). Affirmation 1 : limₙ→+∞ uₙ=1/2.

La borne inférieure est la constante $\frac{1}{2}$. Pour la borne supérieure, on divise le numérateur et le dénominateur par n^2 (pour n assez grand) :

$$\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Comme $\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$, le théorème des gendarmes donne $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}$.

RÉPONSE À RETENIR

Affirmation 1 : vraie. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Question 2.

Sujet p. 5

> Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Soit h une fonction définie et dérivable sur [−4 ; 4]. Sa fonction dérivée h′ est représentée graphiquement par la courbe C_{h'} donnée sur la page. Affirmation 2 : la fonction h est convexe sur [−1 ; 3].

Une fonction dérivable est convexe sur un intervalle si et seulement si sa dérivée y est croissante au sens large. Or, sur le graphique, la courbe de h' monte jusqu'à un maximum situé vers $x \approx 1{,}2$, puis elle descend jusqu'à $x = 3$. Elle n'est donc pas croissante sur tout $[-1;3]$. Par exemple, la lecture graphique montre que $h'(1) > h'(2)$ (les valeurs lues sont approximatives).

RÉPONSE À RETENIR

Affirmation 2 : fausse. La fonction h' n'est pas croissante sur $[-1;3]$, donc h n'est pas convexe sur cet intervalle.

Question 3.

Sujet p. 5

> Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres, qui peuvent être identiques, suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA). Affirmation 3 : il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

Il y a 10^4 suites de quatre chiffres au total. Parmi elles, celles qui ne comportent aucun zéro sont au nombre de 9^4, car chacun des quatre chiffres peut alors être choisi parmi les neuf chiffres non nuls. Le nombre de suites contenant au moins un zéro est donc

$$10^4 - 9^4 = 10\,000 - 6\,561 = 3\,439.$$

Pour chacune de ces suites, les deux lettres distinctes, choisies parmi A, B et C, peuvent être ordonnées de $3 \times 2 = 6$ façons. Le nombre de codes contenant au moins un zéro est donc $3\,439 \times 6 = 20\,634$.

RÉPONSE À RETENIR

Affirmation 3 : vraie. Il existe $20\,634$ codes contenant au moins un zéro.

Question 4.

Sujet p. 5

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par f(x)=x ln(x). Affirmation 4 : f est une solution, sur]0 ; +∞[, de l'équation différentielle xy′−y=x.

Pour vérifier l'affirmation, on dérive $f(x) = x\ln x$ sur $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

En substituant f et sa dérivée dans le membre de gauche de l'équation différentielle, on obtient, pour tout $x > 0$,

$$xf'(x) - f(x) = x(\ln x + 1) - x\ln x = x.$$

L'équation est donc vérifiée sur tout l'intervalle demandé.

RÉPONSE À RETENIR

Affirmation 4 : vraie. La fonction $f(x) = x\ln x$ est une solution de $xy' - y = x$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 4

5 points

Rapport des aires d'un triangle et de son projeté orthogonal dans un plan

Partie A

Question 1.

Sujet p. 6

> Dans un repère orthonormé de l'espace, le plan (P) a pour équation 2x+2y−3z+1=0 et A(1 ; 0 ; 1), B(2 ; −1 ; 1), C(−4 ; −6 ; 5). Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).

On remplace les coordonnées de chaque point dans l'équation du plan (P) : $2x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Pour $A(1;0;1)$, on obtient $2 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \times 1 + 1 = 0$. Donc $A \in (P)$.

Pour $B(2;-1;1)$, on obtient $2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 0$. Donc $B \in (P)$.

Pour $C(-4;-6;5)$, on obtient $2 \times (-4) + 2 \times (-6) - 3 \times 5 + 1 = -34 \neq 0$. Donc $C \notin (P)$.

RÉPONSE À RETENIR

A et B appartiennent au plan (P), mais C n'y appartient pas.

Question 2.

Sujet p. 6

> Montrer que le point C′(0 ; −2 ; −1) est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

Pour montrer que C' est le projeté orthogonal de C sur (P), on vérifie que $C' \in (P)$ et que la droite (CC') est perpendiculaire au plan.

En remplaçant les coordonnées de $C'(0;-2;-1)$ dans l'équation de (P), on obtient $2 \times 0 + 2 \times (-2) - 3 \times (-1) + 1 = 0$. Donc $C' \in (P)$.

Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n} = (2;2;-3)$. Or $\overrightarrow{CC'} = (0-(-4);-2-(-6);-1-5) = (4;4;-6) = 2\vec{n}$. Ainsi, la droite (CC') est perpendiculaire au plan (P).

RÉPONSE À RETENIR

Comme $C' \in (P)$ et $(CC') \perp (P)$, le point $C'(0;-2;-1)$ est bien le projeté orthogonal de C sur (P).

Question 3.

Sujet p. 6

> Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} = B - A = (2-1;-1-0;1-1) = (1;-1;0)$. Tout point de la droite s'obtient en partant de $A(1;0;1)$ et en ajoutant un multiple réel de ce vecteur.

RÉPONSE À RETENIR

Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -t, \\ z = 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Question 4.

Sujet p. 6

> On admet l'existence d'un unique point H vérifiant H∈(AB) et que les droites (AB) et (HC) sont orthogonales. Déterminer les coordonnées du point H.

Tout point H de (AB) s'écrit, d'après la représentation paramétrique, $H(1+t;-t;1)$, où $t \in \mathbb{R}$. La condition $(AB) \perp (HC)$ équivaut à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

On a $\overrightarrow{HC} = C - H = (-5-t;-6+t;4)$. Le produit scalaire vaut donc $(1;-1;0) \cdot (-5-t;-6+t;4) = (-5-t)-(-6+t) = 1-2t$. Ainsi, $1-2t=0$, d'où $t=\frac{1}{2}$.

En reportant cette valeur dans les coordonnées de H, on obtient $H(1+\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1)$.

RÉPONSE À RETENIR

$H\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};1\right)$.

Partie B

Question 1.

Sujet p. 6

> On admet que les coordonnées du vecteur HC sont (−11/2 ; −11/2 ; 4). Calculer la valeur exacte de ‖HC‖.

La norme d'un vecteur de coordonnées $(x;y;z)$ est $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. En utilisant les coordonnées données pour $\overrightarrow{HC}$,

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} = \sqrt{\frac{153}{2}}.$$

Comme $\frac{153}{2} = \frac{9\times 34}{4}$, cette norme s'écrit aussi $\frac{3\sqrt{34}}{2}$.

RÉPONSE À RETENIR

$\|\overrightarrow{HC}\| = \dfrac{3\sqrt{34}}{2}$.

Question 2.

Sujet p. 6

> Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

On choisit $[AB]$ comme base du triangle. Sa longueur est $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$. Par définition de H, $(HC) \perp (AB)$: la longueur HC est donc la hauteur relative à cette base. D'après la question précédente, $HC = \frac{3\sqrt{34}}{2}$.

L'aire d'un triangle étant la moitié du produit d'une base par la hauteur correspondante, on a

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{34}}{2} = \frac{3\sqrt{68}}{4} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

RÉPONSE À RETENIR

$S = \dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Partie C

Question 1.

Sujet p. 6

> On admet que HC′=√(17/2). Soit α=CHC′. Déterminer la valeur de cos(α).

L'angle $\alpha = \widehat{CHC'}$ est l'angle entre $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HC'}$. À partir de $H(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$ et $C'(0; -2; -1)$, on obtient $\overrightarrow{HC'} = (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -2)$.

Le produit scalaire est

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC'} = \left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + 4(-2) = \frac{17}{2}.$$

Par la formule du produit scalaire, $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'}}{\|\overrightarrow{HC}\|\,\|\overrightarrow{HC'}\|}$. Or $\|\overrightarrow{HC}\| = \frac{3\sqrt{34}}{2}$ et $\|\overrightarrow{HC'}\| = \sqrt{\frac{17}{2}}$. Le produit de ces normes vaut $\frac{51}{2}$, car $\sqrt{34}\sqrt{\frac{17}{2}} = 17$.

RÉPONSE À RETENIR

$$\cos(\alpha) = \frac{17/2}{51/2} = \frac{1}{3}.$$

Question 2.a

Sujet p. 6

> Montrer que les droites (C′H) et (AB) sont perpendiculaires.

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 0)$. On a $\overrightarrow{HC'} = (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -2)$. Leur produit scalaire est $(1; -1; 0) \cdot (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -2) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 0 = 0$. Les droites de vecteurs directeurs correspondants sont donc perpendiculaires.

RÉPONSE À RETENIR

$(C'H) \perp (AB)$.

Question 2.b

Sujet p. 6

> Calculer S′, l'aire du triangle ABC′, en donnant la valeur exacte.

On prend $[AB]$ comme base du triangle ABC'. La longueur de la base est $AB = \sqrt{2}$. D'après la question 2.a, HC' est perpendiculaire à (AB) et constitue la hauteur correspondante. La longueur donnée est $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

Ainsi,

$$S' = \frac{1}{2} \times AB \times HC' = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

RÉPONSE À RETENIR

$$S' = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Question 2.c

> Donner une relation entre S, S′ et cos(α).

Les triangles ABC et ABC' ont la même base $[AB]$. Les hauteurs correspondantes sont les distances de C et de C' à la droite (AB), c'est-à-dire respectivement HC et HC', puisque $(HC) \perp (AB)$ et $(HC') \perp (AB)$. Le rapport des aires est donc $\frac{S'}{S} = \frac{HC'}{HC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HC'}$ forment l'angle α. Comme $\cos(\alpha) = \frac{1}{3} > 0$, la formule du produit scalaire donne $\cos(\alpha) = \frac{HC'}{HC}$. Ainsi, $\frac{S'}{S} = \cos(\alpha)$. Vérification avec les valeurs obtenues : $S\cos(\alpha) = \frac{3\sqrt{17}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{17}}{2} = S'$.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{S' = S\cos(\alpha)}$, ou, de façon équivalente, $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{S'}{S}}$.

Sujet : https://www.sujetdebac.fr/annales-pdf/2024/spe-mathematiques-2024-asie-2-sujet-officiel.pdf
© FormaV EI • Proposition de correction, distincte d'un corrigé officiel.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.