Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Centres Etrangers Afrique – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

1. À chaque tirage, on choisit un jeton parmi 8, et on effectue 3 tirages successifs avec remise.

Il y a donc $8 \times 8 \times 8 = 512$ tirages possibles.

2. a. Pour un tirage sans répétition, les trois numéros sont tous différents.

- Pour le premier numéro : 8 choix
- Pour le deuxième : 7 choix (car un numéro a déjà été tiré)
- Pour le troisième : 6 choix (car deux numéros ont déjà été tirés)

Donc, le nombre de tirages sans répétition est : $8 \times 7 \times 6 = 336$.

2. b. Le nombre de tirages contenant au moins une répétition est donc $512 - 336 = 176$.

3. La variable aléatoire X_1 représente le numéro du premier jeton tiré.
Il y a 8 jetons, chacun numéroté de 1 à 8, et chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

Donc la loi de probabilité de X_1 est :

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{8} \quad \text{pour } k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Autre présentation sous forme de tableau :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X_1 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. On utilise la formule de l'espérance pour une loi uniforme :

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1 + 2 + \cdots + 8}{8} = \frac{8 \times 9}{2 \times 8} = \frac{72}{16} = 4{,}5$$

5. La variable $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Les trois variables sont identiquement distribuées et indépendantes, donc :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 3 \times 4{,}5 = 13{,}5$$

6. On veut déterminer $\mathbb{P}(S = 24)$.
Cela revient à compter le nombre de tirages (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 24$, avec $x_i \in \{1, \ldots, 8\}$.

Seul le tirage (8,8,8) réalise l'évènement $(S = 24)$.

Sur les 512 tirages possibles, un seul est favorable à l'évènement.

Donc $\mathbb{P}(S = 24) = \frac{1}{512}$

7. a. On veut déterminer combien de tirages permettent d'obtenir une somme supérieure ou égale à 22, c'est-à-dire :

$$S \in \{22,23,24\}$$

On va les analyser un à un :

- S = 24 :
  Une seule possibilité : $(8,8,8)$
- S = 23 :
  On cherche les triplets (a, b, c) avec $a + b + c = 23$ et $a, b, c \in \{1, \ldots, 8\}$

  Après essais manuels ou aidé de la calculatrice, on trouve 3 tirages :

  $(8,8,7)$, $(8,7,8)$, $(7,8,8)$
- S = 22 :

  On cherche les triplets (a, b, c) avec $a + b + c = 22$ et $a, b, c \in \{1, \ldots, 8\}$
  Le nombre 22 peut être obtenu avec les 2 sommes suivantes :

  $6 + 6 + 8$ ou $7 + 7 + 8$

  Il y a donc six tirages donnant le nombre 22 :

  $(6,8,8)$ $(8,6,8)$ $(8,8,6)$ $(8,7,7)$ $(7,8,7)$ $(7,7,8)$

Au total, on a bien $1 + 3 + 6 = 10$ tirages.

7. b. Nombre total de tirages possibles : 512 (vu en question 1)

Donc, la probabilité de gagner un lot est :

$$\frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

EXERCICE 2 (5 points)

On étudie la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par :

$$f(x)=\frac{e^x}{x-1}$$

1. a. On cherche la limite de $f(x)$ quand $x \to 1$

On a :

- $e^x \to e$ (valeur finie)
- $x-1 \to 0^-$

Donc :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

1. b. Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

2. On étudie la limite de $f(x)$ quand $x \to -\infty$

- $e^x \to 0$
- $x-1 \to -\infty$

Donc :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

3. a. On dérive $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$ sur $]-\infty;1[$

C'est un quotient, donc on applique la formule :

$$f'(x)=\frac{(x-1)\cdot e^x - e^x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1-1)e^x}{(x-1)^2}=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x)=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

3. b. Sur $]-\infty;1[$, on a :

- $e^x > 0$
- $(x-1)^2 > 0$

Le signe de $f'(x)$ dépend donc uniquement du numérateur $x-2$

- Si $x < 2$, alors $f'(x) < 0$
- Si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$

Mais attention : l'intervalle d'étude est $]-\infty;1[$, donc on est toujours dans le cas $x < 2$

Conclusion :
Sur tout $]-\infty;1[$, on a :

$$f'(x) < 0$$

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$

x	$-\infty$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$

4. a. On donne la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$$

On étudie le signe de $f''(x)$:

Sur $]-\infty;1[$, $e^x > 0$, donc le signe dépend de x^2-4x+5 et de $(x-1)^3$

Le discriminant de x^2-4x+5 est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

Donc $x^2-4x+5 > 0$ pour tout réel.

Sur $]-\infty;1[$, on a $(x-1)^3 < 0$

Donc :

$$f''(x) < 0$$

La fonction f est donc concave sur $]-\infty;1[$

4. b. On cherche l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On calcule :

- $f(0) = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$
- $f'(0) = \frac{(0-2)e^0}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2$

Donc, la tangente $\mathcal{T}$ a pour équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = -1 - 2x$$

Équation réduite :

$$y = -2x - 1$$

4. c. On souhaite démontrer que, pour tout $x \in]-\infty; 1[$,

$$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

On divise les deux membres de l'inégalité à démontrer par $x-1$.
Cela revient à comparer $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ à $-2x-1$

Or, on a vu que la droite $y = -2x - 1$ est tangente à f en $x = 0$,
et que f est concave sur $]-\infty; 1[$.

Donc f es ten-dessous de ses tangentes sur $]-\infty; 1[$:

$$f(x) \leq -2x - 1$$

$$\frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$$

$$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

5. a. On cherche les solutions de $f(x) = -2$, c'est-à-dire :

$$\frac{e^x}{x-1} = -2 \Rightarrow e^x + 2(x-1) = 0$$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$, et :

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; 1[$

5. b. On peut faire quelques essais avec la calculatrice :

- $f(0{,}31) = \frac{e^{0{,}31}}{0{,}31-1} \approx -1{,}98$
- $f(0{,}32) = \frac{e^{0{,}32}}{0{,}32-1} \approx -2{,}03$

On affine avec des essais successifs (ou une méthode dichotomique)
On trouve : $\alpha \in [0{,}31; 0{,}32]$

EXERCICE 3 (6 points)

1. Le point I est le milieu de $[AB]$, donc :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$$

Le point J est le milieu de $[CG]$

- C a pour coordonnées $(1{,}1{,}0)$
- G a pour coordonnées $(1{,}1{,}1)$

Donc $J\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(1{,}1{,}\frac{1}{2}\right)$

2. On a :

- E: $(0{,}0{,}1)$
- J: $\left(1{,}1{,}\frac{1}{2}\right)$
  Donc $\overrightarrow{EJ} = \left(1{,}1{,}-\frac{1}{2}\right)$

Le plan (FHI) est défini par les points F, H, I :

- F: $(1{,}0{,}1)$
- H: $(0{,}1{,}1)$
- I: $\left(\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$

On forme deux vecteurs du plan :

$$\overrightarrow{FH} = H - F = (-1{,}1{,}0)$$

$$\overrightarrow{FI} = I - F = \left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$$

On calcul les produits scalaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FH} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 = 0 \\ \overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FI} = -\frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times (-1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{EJ}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$ qui forment le plan (FHI).
Par conséquent $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Une équation cartésienne s'écrit :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Avec le point F $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$ et le vecteur normal $\overrightarrow{EJ}$ $(a, b, c) = \left(1,1, -\frac{1}{2}\right)$

Donc :

$$(x - 1) + (y - 0) - \frac{1}{2}(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow x + y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Rightarrow -2x - 2y + z + 1 = 0$$

4. La droite (EJ) est dirigée par $\overrightarrow{EJ}$ et E est un point de la droite (EJ).

Donc une représentation paramétrique de la droite (EJ) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t = t \\ y = 0 + 1 \times t = t \\ z = 1 - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

5. a. On cherche les coordonnées du point K, projeté orthogonal de E sur le plan (FHI).

Il s'agit donc de trouver l'intersection entre la droite (EJ) et le plan.

On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan :

$$-2x - 2y + z + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -2t - 2t + \left(1 - \frac{1}{2}t\right) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -4t + 1 - \frac{1}{2}t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{9}{2}t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{9}$$

On remplace ensuite dans la paramétrisation :

$$x = y = \frac{4}{9}, \quad z = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Donc :

$$K\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

5. b. On prend pour base le triangle EFH, et on utilise le point L, milieu de $[EF]$, qui est donné comme étant le projeté orthogonal de I sur le plan (EFH). La hauteur de la pyramide est donc le segment $[IL]$.

Coordonnées des points :

L, milieu de $[EF]$, a pour coordonnées :

$$L = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

On a donc :

$$\overrightarrow{IL} = L - I = (0,0,1) \Rightarrow IL = 1$$

Le triangle EFH est rectangle en E, de côtés EF et EH de longueur 1.
Son aire est donc :

$$\text{Aire}_{EFH} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

On applique la formule du volume d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

Le volume de la pyramide $EFHI$ est donc :

$$\frac{1}{6} \text{ cm}^3$$

5. c. On utilise le fait que la pyramide $EFHI$ a pour base le triangle FHI, et pour sommet le point E.

Dans cette configuration, la hauteur de la pyramide est la distance du point E au plan (FHI), c'est-à-dire la longueur EK.

On calcule :

$$\overrightarrow{EK} = K - E = \left(\frac{4}{9} - 0, \frac{4}{9} - 0, \frac{7}{9} - 1\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right)$$

Donc :

$$EK = \| \overrightarrow{EK} \| = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{16+16+4} = \frac{1}{9}\sqrt{36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

On utilise maintenant la formule du volume d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{FHI} \times EK$$

On a vu à la question précédente que $V = \frac{1}{6}$ cm^3, donc :

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{FHI} \times \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Aire}_{FHI} = \frac{1/6 \times 3}{2/3} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

L'aire du triangle FHI est donc $\frac{3}{4}$ cm^2.

EXERCICE 4 (4 points)

Partie A

1.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \quad \text{pour tout } x \in [0; +\infty[$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2.

$$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x+1} - x\right)\left(\sqrt{x+1} + x\right)}{\sqrt{x+1} + x}$$

On reconnaît une identité remarquable au numérateur : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$\left(\sqrt{x+1} - x\right)\left(\sqrt{x+1} + x\right) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2 = x + 1 - x^2 = -x^2 + x + 1$$

Donc :

$$\sqrt{x+1} - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$$

3.

$$f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x$$

On élève au carré (car $x \geq 0$) :

$$\Leftrightarrow x + 1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

On résout cette équation :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Le seul de ces deux réels appartenant à $[0; +\infty[$ est :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

C'est donc l'unique solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.

Partie B

1. On veut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

Initialisation :

$u_0 = 5$, donc $u_1 = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

On a bien :

$$1 \leq u_1 \leq u_0$$

Hérédité :

On suppose que $1 \leq u_n \leq u_{n-1}$. On montre que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

- Comme $u_n \geq 1$, alors $u_n + 1 \geq 2$, donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \geq \sqrt{2} > 1$
- De plus, comme $f(x) = \sqrt{x+1}$ est croissante, et que $f(x) \leq x$ pour $x \geq \ell$, et comme $u_0 = 5 > \ell$, on peut montrer par récurrence que $u_n \geq \ell$, donc $u_{n+1} \leq u_n$

Conclusion :

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La suite (u_n) est bornée inférieurement par 1 et décroissante, donc elle est convergente.

3. Par passage à la limite dans la relation de récurrence :

$$\lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell) \Rightarrow \ell = f(\ell)$$

Donc ℓ est solution de $f(x) = x$ (théorème du point fixe), dont on a vu à la question A.3 que la seule solution est :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La suite converge donc vers :

$$\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

4. a. On veut la valeur renvoyée par seuil(2), donc on cherche combien d'itérations il faut pour que $| u_n - \ell | < 10^{-2}$

Par exécution à la calculatrice, on trouve :

$$\text{seuil}(2) = 5$$

4. b. Cela signifie que, à partir du rang $n = 9$, la valeur u_n est à moins de 10^{-4} de la limite ℓ.

Autrement dit, il faut 9 itérations pour que l'erreur d'approximation soit inférieure à $0{,}0001$.

_____

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.