Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Centres Etrangers Afrique – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. On utilise la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ (en milliers d'individus) et de raison $q = 0{,}93$.

La population au 1er janvier 2026 est donc $u_1 = u_0 \times q = 6 \times 0{,}93 = 5{,}58$

La population est donc de 5580 individus.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$

3. La suite $u_n = 6 \times 0,93^n$ est une suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Dans le milieu A, la population diminue d'environ 7 % chaque année. À long terme, elle tend vers 0 : cela signifie que la population finira par disparaître dans ce milieu.

Partie B

1. On a :

$$v_0 = 6$$

$$v_1 = -0{,}05 \times v_0^2 + 1{,}1 \times v_0 = -0{,}05 \times 36 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$$

La population au 1er janvier 2026 est donc de 4800 individus.

2. On considère la fonction $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$

Cette fonction est un polynôme du second degré. Son coefficient dominant est négatif $(-0{,}05)$, donc sa courbe est une parabole tournée vers le bas.

Son sommet est en $x_s = \frac{-1{,}1}{2 \times (-0{,}05)} = \frac{-1{,}1}{-0{,}1} = 11$

Donc f est croissante sur [0 ; 11].

3. Initialisation : $v_0 = 6$, donc $2 \leq v_1 \leq v_0$ (car on a vu que $v_1 = 4{,}8$)

Hérédité : On suppose que pour un certain n, on a $2 \leq v_n \leq 6$ On veut montrer que $2 \leq v_{n+1} \leq v_n$

On utilise la fonction $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$

Comme f est croissante sur [0 ; 11] et que $v_n \in [2; 6] \subset [0; 11]$, on a :

- $f(v_n) \leq f(6) = -0{,}05 \times 36 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$
- $f(v_n) \geq f(2) = -0{,}05 \times 4 + 1{,}1 \times 2 = -0{,}2 + 2{,}2 = 2$

Donc $v_{n+1} = f(v_n) \in [2; 4{,}8] \subset [2; v_n]$

Conclusion : la propriété est héréditaire. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$

4. La suite (v_n) est bornée inférieurement par 2 et décroissante à partir de $n = 0$. Donc, elle est convergente d'après le théorème de convergence des suites monotones.

5. a. Si $\ell = \lim v_n$, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \lim v_{n+1} = \lim f(v_n) = f(\ell)$$

Donc ℓ est une solution de $f(x) = x$

On résout $-0{,}05x^2 + 1{,}1x = x \Leftrightarrow -0{,}05x^2 + 0{,}1x = 0 \Leftrightarrow x(-0{,}05x + 0{,}1) = 0$

Solutions : $x = 0$ ou $x = 2$

Mais $v_n \geq 2$, donc $\ell = 2$.

5. b. Dans le milieu B, la population diminue au départ, puis se stabilise à long terme à 2000 individus.

Partie C

1. Dans le milieu A, la population est donnée par $u_n = 6 \times 0,93^n$

On cherche le plus petit n tel que $u_n < 3$

$\Leftrightarrow 6 \times 0,93^n < 3 \Leftrightarrow 0,93^n < 0{,}5$

On prend le logarithme : $n\ln(0{,}93) < \ln(0{,}5) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}93)} \approx \frac{-0{,}6931}{-0{,}07257} \approx 9{,}55$

Donc, à partir de $n = 10$, soit en 2035, la population du milieu A devient strictement inférieure à 3000 individus.

2. On utilise une calculatrice pour déterminer le premier n tel que $v_n < 3$.

En faisant les calculs (ou en utilisant la fonction récursive sur la calculatrice), on trouve :

À partir de l'année 2031 (soit $n = 6$), $v_n < 3$.

3. D'après les questions précédentes :

- La population dans A passe sous 3000 en 2035.
- Celle dans B passe sous 3000 en 2031, mais tend vers 2000 ensuite.

La suite (u_n) tend vers 0, et (v_n) tend vers 2. Donc à long terme, $v_n > u_n$.

Il existe donc un rang à partir duquel $v_n > u_n$, c'est-à-dire une année à partir de laquelle la population dans B dépasse celle dans A.

4. a. Programme complété :

```
n = 0
u = 0
v = 6
while u >= v :
    u = u * 0.93
    v = -0.05 * v**2 + 1.1 * v
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

4. b. En exécutant ce programme, on trouve que la condition $v > u$ est remplie pour la première fois lorsque $n = 13$.

Donc l'année affichée est 2025 + 13 = 2038.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

1. Par lecture graphique $f(10) \approx 0{,}85$.

2. Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

3. On a $f(0) = 0{,}5$

Donc $f(0) = \frac{1}{a+e^0} = \frac{1}{a+1} = 0{,}5$

On résout :

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

4. Les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1) permettent de calculer le coefficient directeur de la droite (AB) :

$$m = \frac{1 - 0{,}5}{10 - 0} = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05$$

5. a. Posons $u(x) = 1 + e^{-bx}$, alors $f(x) = \frac{1}{u(x)}$

Donc par dérivation :

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

Or $u'(x) = -be^{-bx}$

Donc :

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$$

5. b. La droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A, donc $f'(0) = 0{,}05$.

On remplace dans l'expression de $f'(x)$:

$$f'(0) = \frac{b \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{b}{4}$$

Donc :

$$\frac{b}{4} = 0{,}05 \Rightarrow b = 0{,}2$$

<u>Partie B</u>

1. On considère désormais $f(x) = \frac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1$$

2. La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{0{,}2e^{-0{,}2x}}{(1+e^{-0{,}2x})^2}$$

Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs sur $[0; +\infty[$, donc $f'(x) > 0$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec :

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = 0{,}5 < 0{,}97$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 > 0{,}97$$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0{,}97$.

4. À l'aide de la calculatrice :

$$f(17) \approx 0{,}968$$

$$f(18) \approx 0{,}973$$

Donc : $\alpha \in [17; 18]$.

<u>Partie C</u>

1. On part de :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par $e^{0{,}2x}$:

$$f(x) = \frac{e^{0{,}2x}}{e^{0{,}2x}+1}$$

2. Soit $u(x) = 1 + e^{0{,}2x}$, alors $u'(x) = 0{,}2e^{0{,}2x}$

On reconnaît $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc une primitive de f est :

$$F(x) = \frac{\ln(1+e^{0{,}2x})}{0{,}2} = 5\ln(1+e^{0{,}2x})$$

3. On utilise la primitive trouvée :

$$\int_0^{40} f(x)\,dx = 5\ln(1+e^{0,2\cdot 40}) - 5\ln(1+e^0)$$
$$= 5\left(\ln(1+e^8) - \ln(2)\right)$$

Donc :

$$I = \frac{5}{40}\left(\ln(1+e^8) - \ln(2)\right) = \frac{\ln(1+e^8) - \ln(2)}{8}$$

Valeur approchée :

$$I \approx 0{,}913$$

EXERCICE 3 (4 points)

Partie A

1. Il y a 64 caractères possibles pour chaque position dans la séquence. Une séquence comporte 4 caractères, donc : $64^4 = 16\,777\,216$.

Il y a 16 777 216 séquences possibles.

2. Si les 4 caractères doivent être tous différents, on compte sans remise :

$$64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$$

3. a. Le nombre de caractères ne comportant pas la lettre A majuscule est 63 (car on enlève un caractère). Donc : $63^4 = 15\,752\,961$ séquences ne comportant pas de A majuscule.

3. b. Le nombre de séquences avec au moins une lettre A majuscule est : $64^4 - 63^4 = 16\,777\,216 - 15\,752\,961 = 1\,024\,255$.

3. c. On veut des séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule. On choisit :

- la position où placer le A majuscule : 4 choix
- les 3 autres caractères parmi les 63 restants (différents de A) : 63^3

Donc nombre de séquences : $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$.

3. d. Pour avoir exactement deux fois la lettre A majuscule, on choisit :

- les 2 positions où placer les A : $\binom{4}{2} = 6$
- les 2 autres caractères parmi les 63 restants : 63^2

Donc nombre de séquences : $6 \times 63^2 = 23\,814$.

Partie B

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale, car on répète 250 fois une expérience de Bernoulli avec deux issues (bon ou mauvais caractère transmis) et que les expériences sont indépendantes.

Paramètres :

- $n = 250$
- $p = 0{,}01$

2. On cherche $P(X = 0)$, c'est-à-dire que aucun caractère n'est mal transmis :

$$P(X = 0) = (1 - p)^{250} = 0,99^{250} \approx 0{,}08$$

3. L'espérance est :

$$\mathbb{E}(X) = np = 250 \times 0{,}01 = 2{,}5$$

La loi est centrée autour de 2 ou 3 erreurs. 16 est une valeur très éloignée de cette moyenne. Donc $P(X > 16)$ est effectivement très faible, et l'affirmation peut être jugée raisonnable.

Partie C

On utilise les propriétés d'additivité de l'espérance et de la variance pour des variables indépendantes :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_4) = 4 \times 250 \times 0{,}01 = 10$$

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) + \mathrm{Var}(X_4)$$

Or $\mathrm{Var}(X_i) = np(1 - p) = 250 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = 2{,}475$

Donc :

$$\mathrm{Var}(S) = 4 \times 2{,}475 = 9{,}9$$

EXERCICE 4 (4 points)

1. a. Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. b. On vérifie que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en calculant les produits scalaires :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (-3)(-1) + (1)(1) + (-1)(4) = 3 + 1 - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = (-1)(-1) + (3)(1) + (-1)(4) = 1 + 3 - 4 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaire du plan (ABC), donc c'est un vecteur normal au plan (ABC).

1. c. Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme :

$$-x + y + 4z + d = 0$$

On remplace par les coordonnées du point A(1 ; 0 ; 3) pour trouver d :

$$-1 + 0 + 4 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow -1 + 12 + d = 0 \Rightarrow d = -11$$

Donc une équation du plan (ABC) est :

$$-x + y + 4z - 11 = 0$$

2. a. Les vecteurs normaux des plans sont :

- $\vec{n}_P = (3; -3; 2)$
- $\vec{n}_{P'} = (1; -1; -1)$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans P et P' sont sécants. Ils se coupent donc selon une droite, qu'on note (d).

2. b. On calcule le produit scalaire de leurs vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'} = 3 \cdot 1 + (-3)(-1) + 2 \cdot (-1) = 3 + 3 - 2 = 4$$

Ce produit est non nul, donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

3. On propose comme vecteur directeur de (d) : $\vec{u} = (1; 1; 0)$

Calcul des produits scalaires :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3 - 3 + 0 = 0$$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs normaux, donc il est contenu dans les deux plans.

D'après le théorème du toit, un vecteur appartenant à deux plans est un vecteur directeur de leur droite d'intersection.

Donc le vecteur $\vec{u} = (1; 1; 0)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

4. Pour P :

$$3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 0$$

Pour P' :

$$2 - 1 - 3 + 2 = 0$$

Le point M appartient bien aux deux plans, donc il appartient à leur droite d'intersection (d).

On connaît un point (M) et un vecteur directeur $\vec{u} = (1; 1; 0)$, donc une représentation paramétrique de la droite (d) est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

5. On a déjà vu que le point M(2 ; 1 ; 3) appartient au plan (ABC). On vérifie maintenant que son vecteur directeur $\vec{u} = (1; 1; 0)$ est contenu dans ce plan.

On calcule le produit scalaire avec le vecteur normal du plan (ABC), qui est $\vec{n} = (-1; 1; 4)$:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (-1)(1) + (1)(1) + (4)(0) = -1 + 1 = 0$$

Le vecteur directeur de la droite (d) est orthogonal au vecteur normal du plan (ABC), donc la droite (d) est contenue dans le plan.

Conclusion **:** Les trois plans P, P' et (ABC) sont concourants, c'est-à-dire qu'ils se coupent tous les trois selon la même droite (d).

_____

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.