Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Nouvelle-Calédonie – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (4 points)

Dans le repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a :

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.

De plus $\overrightarrow{FB} = B - F = (0,0,-1)$, donc $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB} = (0,0,-\frac{1}{3})$

Par ailleurs : $I = F + \overrightarrow{FI} = (1,0,\frac{2}{3})$

1. Affirmation 1 : fausse

On calcule les longueurs :

$$HA = \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$HC = \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

Les trois côtés ont la même longueur, donc HAC est équilatéral, et il ne peut pas être rectangle.

L'affirmation 1 est fausse.

2. Affirmation 2 : vraie

Une représentation paramétrique de (HF) est :

$$H(0,1,1) + t(F - H) = (0,1,1) + t(1,-1,0)$$

donc $(x, y, z) = (t, 1-t, 1)$

Une représentation paramétrique de (DI) est :

$$D(0,1,0) + s(I - D) = (0,1,0) + s(1,-1,\frac{2}{3})$$

donc $(x, y, z) = (s, 1-s, \frac{2}{3}s)$

Pour une intersection, on impose $(t, 1-t, 1) = (s, 1-s, \frac{2}{3}s)$. Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} t = s \\ 1 - t = 1 - s \\ 1 = \frac{2}{3}s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = s \\ t = s \\ s = \frac{3}{2} = t \end{cases}$$

Il existe donc un point commun $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ aux deux droites. Ce point est en dehors du cube.

L'affirmation 2 est vraie.

3. Affirmation 3 : fausse

On simplifie $\vec{u}$ car $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ et $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$. Ainsi :

$$\vec{u} = (\sin\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha) = \sin\alpha\ (1,1,-1)$$

Dans le plan (FAC), on peut prendre deux vecteurs directeurs non colinéaires :

$$\overrightarrow{FA} = A - F = (-1,0,-1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FC} = C - F = (0,1,-1)$$

Un vecteur normal au plan est alors :

$$\overrightarrow{FA} \times \overrightarrow{FC} = (1,-1,-1)$$

Or $(1,1,-1)$ n'est pas colinéaire à $(1,-1,-1)$. Les deux premières coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc $\vec{u}$ n'est pas normal au plan (FAC).

L'affirmation 3 est fausse.

4. Affirmation 4 : fausse

Un segment est déterminé par un choix de 2 sommets distincts parmi 8, donc :

$$N = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Alors que $\frac{8^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$.

L'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

ZONE 1 (au-dessus de $y = x$) : c'est un triangle rectangle de côtés 1 et 1, donc son aire vaut :

$$\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

ZONE 2 (sous la parabole $y = x^2$) : son aire vaut l'aire « sous la courbe » entre 0 et 1, donc :

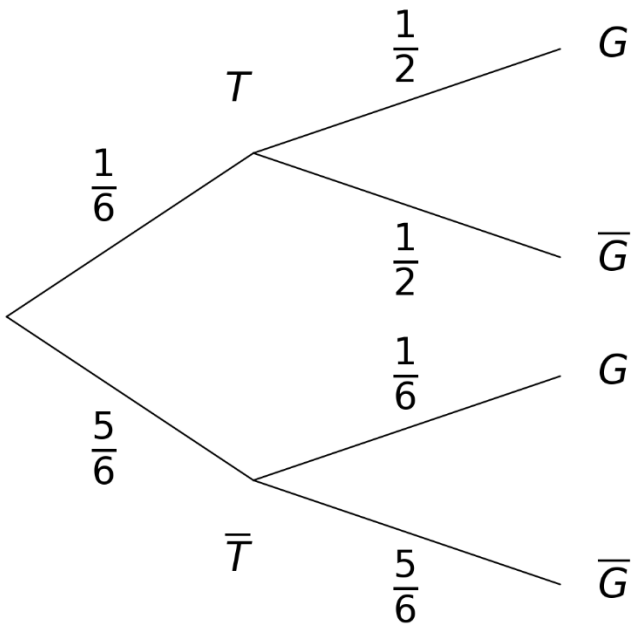
$$\int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ZONE 3 (entre $y = x$ et $y = x^2$) : c'est la différence entre l'aire sous $y = x$ et l'aire sous $y = x^2$, donc :

$$\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Partie B

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(T)\,P(G \mid T) + P(\overline{T})\,P(G \mid \overline{T})$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

3. On cherche $P(T \mid G)$:

$$P(T \mid G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{P(T)\,P(G \mid T)}{P(G)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{12} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Partie C

1. a. La variable X_1 prend les valeurs 1, 2, 3 avec :

$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P(X_1 = 3) = \frac{1}{6}$

Donc :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

1. b. On calcule d'abord $E(X_1^2)$:

$$E(X_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

Alors :

$$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$$

2. a. Avoir $Y = 9$ signifie $X_1 + X_2 + X_3 = 9$. Or chaque $X_i \leq 3$, donc cela n'est possible que si $X_1 = X_2 = X_3 = 3$.

Ainsi, comme les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes :

$$P(Y = 9) = P(X_1 = 3) \times P(X_2 = 3) \times P(X_3 = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

2. b. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3\,E(X_1) = 3 \times \frac{5}{3} = 5$$

2. c. Comme X_1, X_2, X_3 sont indépendantes, la variance d'une somme est la somme des variances :

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3\,V(X_1) = 3 \times \frac{5}{9} = \frac{5}{3}$$

EXERCICE 3 (5 points)

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}}{e^{x/2}+2}$$

Or $e^{x/2} > 0$ et $e^{x/2} + 2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout x.

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On calcule :

$$f(2\ln(2)) = \ln\left(e^{\frac{2\ln 2}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln 2} + 2\right)$$

$$= \ln(2+2) = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$$

3. On a $u_1 = f(u_0)$, donc :

$$u_1 = \ln\left(e^{\ln(9)/2} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(3)} + 2\right) = \ln(3+2) = \ln(5)$$

4. On montre par récurrence la propriété P_n : $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation :

On sait que $u_0 = \ln(9)$ et $u_1 = \ln(5)$.

De plus $2\ln(2) = \ln(4)$.

Comme ln est croissante, alors :

$$\ln(4) \leq \ln(5) \leq \ln(9)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(2) \leq u_1 \leq u_0$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité :

On suppose P_n vraie, donc $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Comme f est croissante (question 1), on a :

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

C'est-à-dire :

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Et, toujours parce que f est croissante et car on sait que $2\ln(2) \leq u_{n+1}$, on déduit :

$$f(2\ln(2)) \leq f(u_{n+1})$$

Donc, avec la question 2 :

$$2\ln(2) \leq u_{n+2}$$

On a bien $2\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. D'après la question 4, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n, donc (u_n) est décroissante.

Toujours d'après la question 4, $u_{n+1} \geq 2\ln(2)$ pour tout n, donc (u_n) est minorée par $2\ln(2)$.

Une suite décroissante et minorée est convergente. Donc (u_n) converge.

6. a. On factorise :

$$X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$$

Donc les solutions réelles sont $X = 2$ ou $X = -1$.

Autre méthode plus longue : On calcule le discriminant Δ puis les 2 racines.

6. b. On pose $X = e^{x/2}$.

Alors $X > 0$ et $e^x = (e^{x/2})^2 = X^2$

Ainsi :

$$e^x - e^{x/2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - X - 2 = 0$$

D'après la question 6. a., $X = 2$ ou $X = -1$, mais $X > 0$ donc $X = 2$.

Ainsi :

$$e^{x/2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\ln(2)$$

L'ensemble des solutions est donc $\{2\ln(2)\}$.

6. c. Résoudre $f(x) = x$ revient à résoudre :

$$\ln\left(e^{x/2} + 2\right) = x$$

$$\Leftrightarrow e^{x/2} + 2 = e^{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{x} - e^{x/2} - 2 = 0$$

D'après la question 6. b., la seule solution est $x = 2\ln(2)$.

Donc l'ensemble des solutions de $f(x) = x$ est $\{2\ln(2)\}$.

6. d. On sait (question 5) que (u_n) converge vers une limite ℓ. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est continue (composition de fonctions continues), alors :

$$\ell = f(\ell)$$

Donc ℓ est une solution de $f(x) = x$.

Or d'après la question 6. c., il n'y a qu'une solution : $2\ln(2)$.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\ln(2)$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. On a :

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$$

Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Par ailleurs, par croissance comparées, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4}$$

$$= \frac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. Sur $]0; +\infty[$, on a $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2\ln(x)$.

$$1 - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

On en déduit le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1+\frac{1}{2e}$	↘	1

Avec :

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{e} + 1 = 1 + \frac{1}{2e} \approx 1{,}184$$

4. a. D'après les questions précédentes, on a :

- f est continue et strictement croissante sur $]0;\sqrt{e}[$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty < 0$
- $f\left(\sqrt{e}\right) = 1 + \frac{1}{2e} \approx 1{,}184 > 0$

Donc f ne peut s'annuler qu'une seule fois sur cet intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).

De plus, sur $[\sqrt{e};+\infty[$, f est continue et décroissante et tend vers 1, donc $f(x) \geq 1$ sur $[\sqrt{e};+\infty[$ et elle ne peut pas s'y annuler.

Il existe donc une unique solution α de $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$.

4. b. On calcule à la calculatrice :

$$f(0{,}65) \approx -0{,}0196$$

$$f(0{,}66) \approx 0{,}0461$$

Comme f est croissante sur $]0;\sqrt{e}[$ et change de signe entre $0{,}65$ et $0{,}66$, on obtient l'encadrement suivant :

$$0{,}65 < \alpha < 0{,}66$$

4. c. On déduit le tableau de signes d'après les questions précédentes.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, f est négative sur $]0;\alpha[$ et positive sur $]\alpha;+\infty[$.

5. a. Sur $\mathcal{C}_g$, le point M a pour coordonnées $(x, \ln(x))$.

Donc :

$$OM^2 = x^2 + \ln^2(x)$$

5. b. Posons $h(x) = OM^2 = x^2 + \ln^2(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Alors :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

$$= 2x + \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$= 2x \times \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

$$= 2xf(x)$$

Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $f(x)$ et s'annulera en α.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(\alpha)$	↗	$+\infty$

Ainsi $h(x)$ décroît sur $]0;\alpha[$ puis croît sur $]\alpha;+\infty[$, donc $\mathrm{h}(x) = OM^2$ admet un minimum en α.

5. c. La distance minimale vaut

$$d = \sqrt{\mathrm{h}(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + \ln^2(\alpha)}$$

Or $f(\alpha) = 0$ donne $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0$, donc $\ln(\alpha) = -\alpha^2$ et $\ln^2(\alpha) = \alpha^4$.

Ainsi :

$$d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

———

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.