Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

CORRIGE BAC

Année : 2025 **Matière :** Spé maths **Sujet :** Amérique du Nord 2 (secours)

Exercice 1 :

Partie A : Etude de la fonction f

1.

En $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1) = -\infty$ car $2 > 0$

Donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$

En $+\infty$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}, xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$ car $2 > 0$

Donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

2.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 2$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1-x)e^{-x} + 2}$.

3.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x}$

$f''(x) = -(2-x)e^{-x}$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f''(x) = (x-2)e^{-x}}$.

4.

Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de f''.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc les fonctions f'' et $x \mapsto x - 2$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

La fonction f'' est positive sur $[2, +\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } [2, +\infty[.}$

La fonction f'' est négative sur $]-\infty, 2]$ donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty, 2].}$

5.

La fonction f'' est positive sur $[2, +\infty[$ donc $\boxed{f' \text{ est croissante sur } [2, +\infty[.}$

La fonction f'' est négative sur $]-\infty, 2]$ donc $\boxed{f' \text{ est décroissante sur }]-\infty, 2]}$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f'		↘	$2-e^{-2}$	↗	

En effet, $\boxed{f'(2)=(1-2)e^{-2}+2=2-e^{-2}.}$

6.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in]-\infty,0]$, $e^x \leq e^0 = 1$.
Comme $1 < 2$, $e^{-2} < 2$ (on a bien $-2 \in]-\infty,0]$).
On en déduit que $2-e^{-2} > 0$.
D'après le tableau de variations de la question précédente, on trouve que :
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7.

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question précédente) sur $\mathbb{R}$.
De plus, d'après la question 1, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty,+\infty[$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=0$.

D'après la calculatrice, $f(0{,}37) \approx -0{,}004 < 0$ et $f(0{,}38) \approx 0{,}02 > 0$.
Ainsi, $\boxed{0{,}37 \leq \alpha \leq 0{,}38}$.

8.

Pour cela, on étudie le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x)-(2x-1)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x)-(2x-1) = xe^{-x}+2x-1-(2x-1) = xe^{-x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $f(x)-(2x-1)$ est du même signe que x sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout $x \in]-\infty,0], f(x)-(2x-1) \leq 0$ et pour tout $x \in [0,+\infty[, f(x)-(2x-1) \geq 0$
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x)-(2x-1)=0 \Leftrightarrow xe^{-x}=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $e^{-x}=0$ (impossible) $\Leftrightarrow x=0$.
Ainsi, $\boxed{C_f \text{ est en-dessous de } \Delta \text{ sur }]-\infty,0] \text{ et } C_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ sur } [0,+\infty[. C_f \text{ et } \Delta \text{ s'interceptent au point d'abscisse 0.}}$

Partie B : Calcul d'aire

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties.
On pose $u'(x)=e^{-x}$ et $v(x)=x$. Ainsi, $u(x)=-e^{-x}$ et $v'(x)=1$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1,n]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1,n]$.
On a donc :

$$I_n = [-xe^{-x}]_1^n - \int_1^n -e^{-x}dx.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = (-ne^{-n}+e^{-1}) - [e^{-x}]_1^n$$
$$I_n = -ne^{-n}+e^{-1}-e^{-n}+e^{-1}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, I_n = 2e^{-1}-(n+1)e^{-n}.}$

2.

a.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^n xe^{-x}dx = \int_1^n \big(f(x) - (2x-1)\big)dx = \int_1^n f(x)dx - \int_1^n (2x-1)dx$ par linéarité de l'intégrale.

Donc, I_n est l'aire du domaine compris entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$ à laquelle on retire l'aire du domaine compris entre la droite Δ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

Il reste donc l'aire du domaine compris entre C_f, Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

Ainsi, I_n est l'aire du domaine D_n.

b.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = 2e^{-1} - ne^{-n} - e^{-n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ par composition.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, ne^{-n} = \frac{n}{e^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ par croissance comparée.

Ainsi, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 2e^{-1}$.

Grâce à la question précédente, on en déduit l'aire du domaine D_n tend vers $2e^{-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 :

1.

Un vecteur directeur de la droite D et $\vec{u} = (-1, 3, 4)$ et un vecteur directeur de la droite D' est $\vec{v} = (2, -6, -8)$ d'après leurs représentations paramétriques respectives.

On remarque que $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$ donc les vecteurs directeurs respectifs des droites D et D' sont colinéaires, donc les droites D et D' sont parallèles.

Ainsi, l'affirmation est vraie.

2.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (3, 0, -5)$ et $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (8, 0, 8)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan défini par les points A, B et C car les points A, B et C ne sont pas alignés d'après l'énoncé.

Reprenons le vecteur $\vec{u} = (-1, 3, 4)$ qui est un vecteur directeur de la droite D.

$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = -1 \times 3 + 3 \times 0 + 4 \times (-5) = -23 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux. Ainsi, la droite D n'est pas orthogonale au plan défini par les points A, B et C.

Ainsi, l'affirmation est fausse.

3.

Pour savoir si les droites D et Δ sont sécantes, on cherche t et t' tels que les représentations paramétriques de D et Δ donnent le même point.

Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3 - t = -4 + 2t' \\ -2 + 3t = 1 - 3t' \\ 1 + 4t = 2 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 7 \\ 3t + 3t' = 3 \\ 4t - t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 7 \\ t + t' = 1 \\ 4t - t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 6 \\ t = 1 - t' = -5 \\ 4t - t' = 1 \end{cases}$$ en soustrayant la deuxième ligne à la première.

Le couple (t, t') trouvé vérifie-t-il la dernière équation ?

$4 \times (-5) - 6 = -20 - 6 = -26 \neq 1$. Le couple (t, t') trouvé n'est pas solution. Le système n'admet aucune solution donc les droites D et Δ ne sont pas sécantes.
Ainsi, l'affirmation est fausse.

4.

Le point F appartient bien au plan P car $2x_F - 3y_F + z_F - 6 = 2 \times (-3) - 3 \times (-3) + 3 - 6 = 0$.
Le point $G = (0,0,6)$ appartient bien au plan P car $2x_G - 3y_G + z_G - 6 = 0 - 0 + 6 - 6 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{FG}$ est donc un vecteur du plan P
$\overrightarrow{FG} = (x_G - x_F, y_G - y_F, z_G - z_F) = (3,3,3)$.
Le point $H = (0,-2,0)$ appartient aussi au plan P car $2x_H - 3y_H + z_H - 6 = 0 - 3 \times (-2) + 0 - 6 = 0$.
$\overrightarrow{FH} = (x_H - x_F, y_H - y_F, z_H - z_F) = (3,1,-3)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont non colinéaires donc définissent le plan P.
D'autre part, $\overrightarrow{EF} = (x_F - x_E, y_F - y_E, z_F - z_E) = (2,-3,1)$.
$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FG} = 3 \times 2 + 3 \times (-3) + 3 \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FH} = 3 \times 2 + 1 \times (-3) + (-3) \times 1 = 0$.
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est bien orthogonal au plan P, car il est orthogonal à deux vecteurs définissant le plan P, d'où F est bien le projeté orthogonal du point E sur le plan P.
Ainsi, l'affirmation est vraie.

5.

Supposons qu'une telle valeur de a existe. La valeur $-a$ convient également car une équation du plan alors obtenu est $-3x + y - (-a)^2 z + 3 = 0$, soit $-3x + y - a^2 + 3 = 0$, ce qui donne le même plan P'.
On en déduit que, soit un tel a n'existe pas, soit il existe, mais il n'est pas unique.
Ainsi, l'affirmation est fausse.

Exercice 3 :

1.

D'après l'énoncé, $P(C) = 0{,}02, P(V) = 0{,}9$ et $P_C(V) = 0{,}62$.

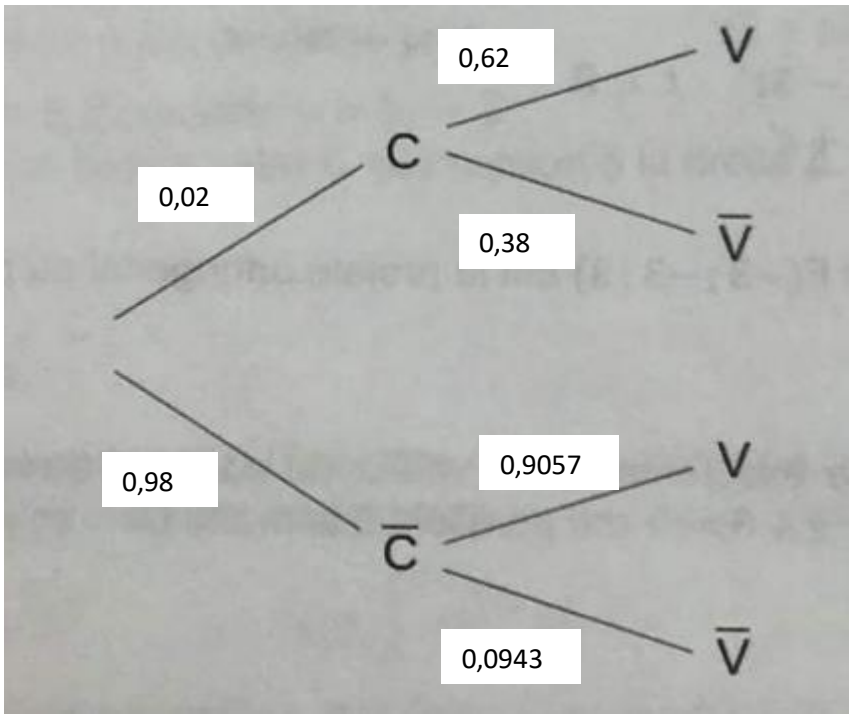
2.

a. Par définition, $P_C(V) = \frac{P(C \cap V)}{P(C)}$.
Ainsi, $P(C \cap V) = P_C(V)P(C)$.
Avec les valeurs de la question précédente, $P(C \cap V) = 0{,}62 \times 0{,}02 = 0{,}0124$.

b.

Les événements C et $\bar{C}$ forment une partition de l'univers.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$.
Donc, $P(\bar{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V)$
Ainsi, $P(\bar{C} \cap V) = 0{,}9 - 0{,}0124 = 0{,}8876$.

3.



$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$
$P_C(\bar{V}) = 1 - P_C(V) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38.$
$P_{\bar{C}}(V) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(\bar{C})} = \frac{0{,}8876}{0{,}98} \approx 0{,}9057$ de même qu'à la question 2a.
$P_{\bar{C}}(\bar{V}) = 1 - P_{\bar{C}}(V) \approx 1 - 0{,}9057 = 0{,}0943.$

4.

$P_V(C) = \frac{P(V \cap C)}{P(V)} = \frac{0{,}0124}{0{,}9} \approx 0{,}0138.$
Ainsi, la probabilité qu'une personne ait été contaminée sachant qu'elle a été vaccinée est d'environ 0,0138. Donc, environ 1,38% des personnes vaccinées ont été contaminées.

5.

a.

A la question 3, on a vu que $P_{\bar{C}}(V) \approx 0{,}9057$ et $P_{\bar{C}}(\bar{V}) \approx 0{,}0943$. Ainsi, parmi les personnes non contaminées, environ 90,57% ont été vaccinées et environ 9,43% n'ont pas été vaccinées. Ainsi, il n'y a pas 10 fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées parmi les personnes non contaminées.
L'affirmation est fausse.

b.

$P_V(\bar{C}) = 1 - P_V(C) \approx 1 - 0{,}0138 = 0{,}9862$. Ainsi, $98{,}62\%$ de la population vaccinée n'a pas été contaminée.
L'affirmation est vraie.

6.

a.

Choisir un habitant est une expérience de Bernoulli dont le succès est « la personne est contaminée » de probabilité $0{,}02$.

On reproduit 20 fois cette expérience de façon identique et indépendante (la population du pays est assez importante pour pouvoir assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise d'après l'énoncé). On obtient donc un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 20$ et $p = 0{,}02$

La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes contaminées suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;0{,}02)$.

b.

La probabilité pour que k personnes (avec k entier compris entre 0 et 20) soient contaminées est $P(X = k) = \binom{20}{k}0{,}02^k(1-0{,}02)^{20-k}$ par X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;0{,}02)$.

Ainsi, $P(X = 4) = \binom{20}{4}0{,}02^4(1-0{,}02)^{20-4} \approx 0{,}0006$.

La probabilité pour que 4 personnes exactement du groupe de 20 personnes soient contaminées est d'environ 0,0006.

Exercice 4 :

Partie A : Conjecture

1.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2.

Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Partie B : Etude d'une suite auxiliaire

1.

$w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2}$.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1}$ d'après la relation de récurrence sur (u_n).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

On en déduit que (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.

(w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ d'où $u_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}u_n$.

Avec la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n}$.

5.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Initialisation : $u_0 = 0 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$. La propriété est vraie au rang $k = 0$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang k. Montrons que la propriété est vraie au rang $k + 1$.

D'après la question précédente, $u_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}u_k$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On en déduit que $u_{k+1} = (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. La propriété est vraie au rang $k + 1$, elle est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $k = 0$ et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On en déduit que : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Partie C : Etude de la suite (u_n)

1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1-2n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(1-n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geq 0$ car $\frac{1}{2} \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ donc $-n \leq -1$ (on multiplie par $-1 \leq 0$) et donc $1 - n \leq 0$ (on ajoute 1).

Par produit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-n) \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } n = 1}$.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$ et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$.

3.

On doit résoudre $l = l - \frac{1}{4}l$.

Pour tout $l \in \mathbb{R}, l = l - \frac{1}{4}l \Leftrightarrow l = \frac{3}{4}l \Leftrightarrow \frac{1}{4}l = 0 \Leftrightarrow l = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.