Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Centres étrangers

Sujet 2 – 13 juin 2025

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. P. M. E. P.

Exercice 1 — 6 points

Partie A

1. $u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58$.

2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0,93$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$.

3. La raison q vérifiant $q \in]-1\,;\,1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,93^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Interprétation : ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années la population animale dans le milieu A va aller à l'extinction.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$.

En particulier $v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8$.

Il y aura donc 4 800 individus au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

2. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

$\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -0,1x + 1,1$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff -0,1x + 1,1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1,1}{0,1} \iff x \leqslant 11$.

Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.

3. Nous savons que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$. Montrons par récurrence que : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

- **Initialisation :** $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ donc $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
  Comme $v_n \in [0\,;\,11]$, $v_{n+1} \in [0\,;\,11]$, et que f est croissante sur $[0\,;\,11]$ d'après le résultat précédent, les images des quatre nombres de l'encadrement sont rangées dans le même ordre croissant, soit
  $f(2) \leqslant f[v_{n+1}] \leqslant f[v_n] \leqslant f(6) \iff 2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n_1} \leqslant 4,8$ (car $f(2) = -0,05 \times 2^2 + 2,2 = -0,2 + 2,2 = 2$).
  On a donc $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :** La proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. Le résultat précédent montre deux résultats : pour tout entier naturel n,

- $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante ;

- $2 \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par 2.

D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 2$.

5. **a.** La fonction f est continue, $(f([2\,;\,6]) \subset [2\,;\,6])$ et la suite (v_n) converge, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution sur $[2\,;\,6]$ de l'équation $f(x) = x$.

b. On résout l'équation $\ell = f(\ell)$:
$\ell = f(\ell) \iff \ell = -0,05\ell^2 + 1,1\ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0$
On obtient deux solutions : $\ell = 0 \notin [2\,;\,6]$ et $\ell = 2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.
Ceci signifie qu'au bout d'un certain nombre d'années la population va se rapprocher de 2 000 individus, soit le tiers du nombre initial.

Partie C

1. En milieu A, on utilise la suite (u_n). On cherche à résoudre $u_n < 3$.
$u_n < 3 \iff 6 \times 0,93^n < 3 \iff 0,93^n < \dfrac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $0,93^n < \dfrac{1}{2} \iff \ln(0,93^n) < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff n \times \ln(0,93) < -\ln(2)$
$\iff n > -\dfrac{\ln(2)}{\ln(0,93)}$ car $\ln(0,93) < 0$.
Or $-\dfrac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$ donc $n \geqslant 10$ soit en 2035.
À partir de 2035, le nombre d'individus en milieu A sera inférieur à 3 000.

2. On sait que (v_n) est décroissante. Avec la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 3,14$ et $v_6 \approx 2,96$. Donc pour $n \geqslant 6$.
Ce sera donc à partir de 2031.

3. La suite (u_n) converge vers 0, et (v_n) converge vers 2. Les deux suites étant décroissantes en partant de $u_0 = v_0 = 6$, il existera un rang N tel que $v_N > u_N$.

4. Le script complété :

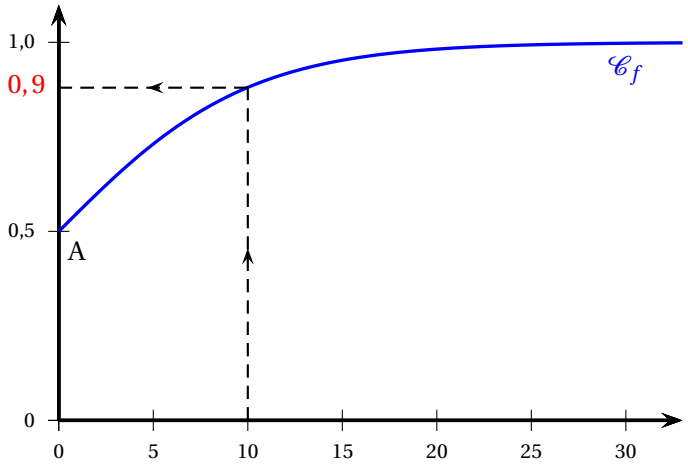
```
n=0
u = 6
v = 6
while u >= v :
    u = 0.93*u
    v= -0.05*v**2+1.1*v
    n = n+1
print (2025 + n)
```

5. Le script affiche 2038. Avec la calculatrice : $u_{12} \approx 2,51$ et $v_{12} \approx 2,41$; $u_{13} \approx 2,34$ et $v_{13} \approx 2,36$. Donc $N = 13$.

Exercice 2 — 6 points

Partie A

1. 1970 - 1960 = 10. Donc on lit $f(10)$.



Dans la limite de précision du graphique, $f(10) \approx 0,9$.

2. Si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

3. $f(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{1}{2} \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.

4. Soit m ce coefficient directeur. $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0,5}{10} = 0,05$.

5. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$. $f(t)$ est de la forme $\dfrac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$ Donc en posant $u(t) = a + \mathrm{e}^{-bt}$, $u'(t) = -b\mathrm{e}^{-bt}$

Donc $\forall\, t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{-b\mathrm{e}^{-bt}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bt}\right)^2} = \dfrac{b\mathrm{e}^{-bt}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bt}\right)^2}$.

b. Le nombre dérivée de f en 0 est égale à la pente de la droite (AB), tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donc $f'(0) = 0,05$ donc $\dfrac{b}{2^2} = 0,05$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$ (par composition). Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$.

2. La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de la forme $\dfrac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$.

Donc en posant $u(t)=1+\mathrm{e}^{-0,2t}$, $u'(t)=-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}$, $\forall\, t\in[0\,;\,+\infty[$, $f'(t)=-\dfrac{-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$

soit $f'(t)=\dfrac{0,2\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$.

$\forall\, t\in[0\,;\,+\infty[$, $0,2\mathrm{e}^{-0,2t}>0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2>0$ donc $f'(t)>0$ donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On a $f(0)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=1$.

La fonction f est continue strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$.

Or $0,97\in\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0,97$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4. Avec la calculatrice $\alpha\approx 17,4$ donc $\alpha\in]17\,;\,18[$.

Partie C

1. $\forall\, t\in[0\,;\,+\infty[$, $f(t)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{0,2t}$, on obtient : $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{\mathrm{e}^{0,2t}(1+\mathrm{e}^{-0,2t})}=\dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{\mathrm{e}^{0,2t}+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}$.

2. f est de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, de primitive $\ln(u(t))$ (avec u fonction strictement positive car les deux termes du quotient sont strictement positifs) en posant $u(t)=\mathrm{e}^{0,2t}$ et $u'(t)=0,2\mathrm{e}^{0,2t}$.

En écrivant $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}=\dfrac{1}{0,2}\times\dfrac{0,2\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}=5\times\dfrac{0,2\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}$,

on détermine la fonction F, une primitive de f : $F(t)=5\ln\left(1+\mathrm{e}^{0,2t}\right)$ pour $t\in[0\,;\,+\infty[$.

3. $I=\dfrac{1}{40}\displaystyle\int_0^{40}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{40}\int_0^{40}\dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{40}\left[5\ln\left(1+\mathrm{e}^{0,2t}\right)\right]_0^{40}=$

$\dfrac{5}{40}\left(\ln\left(\mathrm{e}^8+1\right)-\ln(2)\right)$

$=\dfrac{1}{8}\left(\ln\left(\mathrm{e}^8+1\right)-\ln(2)\right)=\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^8+1}{2}\right)\approx 0,913$

Exercice 3 — 4 points

Partie A

1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter

$\text{card}(\Omega)=16\,777\,216$.

2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\dfrac{64\,!}{(64-4)\,!} = 64\times 63\times 62\times 61 = 15\,249\,024$ possibilités.

3. **a.** On reprend la question **1.** avec seulement 63 caractères. cela donne donc $63^4 = 15\,752\,961$ possibilités.

b. Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ».
Son événement contraire est donc : $\overline{X}$ « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ».
Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1\,024\,255$.
Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.

c. La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4\times 63^3 = 1\,000\,188$ possibilités.

d. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\binom{4}{2}\times 63^2 = 23\,814$ possibilités.

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$.

2. $P(X=0) = \binom{250}{0}\times 0,01^0\times(1-0,01)^{250-0} = 0,99^{250} \approx 0,081$.

3. On calcule $P(X > 16) = P(X \geqslant 17)$. Avec la calculatrice, $P(X \geqslant 17) \approx 1,04\times 10^{-9}$, ce qui est négligeable.

Partie C

En utilisant les propriétés sur la linéarité de l'espérance et de la variance (les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 étant indépendantes), on peut affirmer que :
$E(S) = E(X_1+X_2+X_3+X_4) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4) = 4\times E(X) =$
$4\times n\times p = 4\times 250\times 0,01 = 10$.
Il en est de même pour la variance :
$V(S) = V(X_1+X_2+X_3+X_4) = V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+V(X_4) = 4\times V(X) = 4\times n\times p\times(1-p) =$
$4\times 250\times 0,01\times 0,99 = 9,9$.

Exercice 4 — 4 points

1. **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\dfrac{-3}{-1} \neq \dfrac{1}{3}$.
Les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC). Avec $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, on calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 3+1-4=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1+3-4=0$. $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc il est normal à ce plan (ABC).

c. $\vec{n}$ étant normal au plan (ABC), une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $-x+y+4z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$A(1\ ;\ 0\ ;\ 3)\in(ABC)$ donc $-1+0+12+d=0 \iff d=-11$.

Donc (ABC) : $-x+y+4x-11=0$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}'$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{3}{1}\neq\dfrac{2}{-1}$. Donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont ni parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Leur intersection est donc une droite (d).

b. $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=3+3-2=4\neq 0$ donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

(d) est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ dont les vecteurs normaux sont respectivement $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Pour montrer que $\vec{u}$ dirige (d), il suffit de prouver que ce vecteur est contenu dans chacun des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, soit $\vec{u}.\vec{v}=0$ et $\vec{u}.\vec{v'}=0$

Or, $\vec{u}.\vec{v}=1\times 3+1\times(-3)=0$ et $\vec{u}.\vec{v}=1\times 1+1\times(-1)=0$.

Ainsi, (d) est bien dirigée par $\vec{u}$.

3. On remplace les coordonnées de M dans les deux équations de plans :

- $6-3+6-9=12-12=0$ donc $M\in\mathscr{P}$;
- $2-1-3+2=4-4=0$ donc $M\in\mathscr{P}'$.

La droite (d) passe donc par M et a pour vecteur directeur (d) : $\vec{u}$ donc

$$\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=3\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

4. On cherche l'intersection de (ABC) et de (d). On résout le système :

$$\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=3\\-x+y+4z-11=0\end{cases}$$

. S'il admet une infinité de solutions alors $(d)\subset(ABC)$.

On remplace x, y et z dans la dernière équation :

$-x+y+4z-11=0 \Rightarrow -(2+t)+1+t+4\times 3-11=0 \iff 0=0$. La dernière équation est vérifiée quelque soit la valeur de t. Donc ce système admet une infinité de solutions. $(d)\subset(ABC)$

Donc la droite (d) appartient aux trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Reprenons les trois vecteurs normaux des trois plans : $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{n_1}$ ne sont pas colinéaires, de même pour $\vec{u}$ et $\vec{n_2}$. Le plan (ABC) n'est donc confondu ni avec $\mathscr{P}$ ni avec $\mathscr{P}'$. Ces trois plans sont simplement sécants, d'intersections (d).

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.