Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Maths - Polynésie 2026 - Jour 1

Corrigé

Exercice 1

Partie A

1) D'après l'énoncé :

— $\mathbb{P}(M) = 0{,}8$. Ainsi,

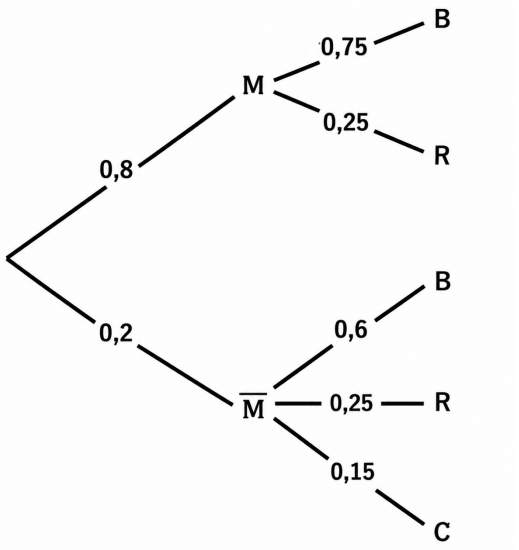
$$\mathbb{P}(\overline{M}) = 1 - \mathbb{P}(M) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

— $\mathbb{P}_M(B) = 0{,}75$. Donc,

$$\mathbb{P}_M(R) = 1 - \mathbb{P}_M(B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

— $\mathbb{P}_{\overline{M}}(B) = 0{,}6$.

Pour l'instant, nous n'avons pas accès aux valeurs de $\mathbb{P}_{\overline{M}}(R)$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(C)$. On peut déjà compléter l'arbre suivant ; les deux valeurs 0,25 et 0,15 sur les branches issues de $\overline{M}$ seront déterminées à la question 2.



NB. Les autres valeurs sont complétées sur cet arbre après la question 2.

2) a) On a :

$$\mathbb{P}(\overline{M} \cap R) = 0{,}05.$$

Cela signifie que la probabilité qu'une planche soit en résine et soit recyclée est de 0,05.

2) b) On cherche $\mathbb{P}_{\overline{M}}(C)$. D'abord,

$$\mathbb{P}_{\overline{M}}(C) = 1 - (\mathbb{P}_{\overline{M}}(R) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(B)).$$

Il manque la valeur de $\mathbb{P}_{\overline{M}}(R)$. Or, par définition,

$$\mathbb{P}_{\overline{M}}(R) = \frac{\mathbb{P}(\overline{M} \cap R)}{\mathbb{P}(\overline{M})} = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25.$$

D'après la question 1, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(B) = 0{,}6$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\overline{M}}(C) &= 1 - (\mathbb{P}_{\overline{M}}(B) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(R)) \\ &= 1 - (0{,}6 + 0{,}25) \\ &= 1 - 0{,}85 \\ &= 0{,}15.\end{aligned}$$

NB. À partir de là, on peut entièrement compléter l'arbre de probabilités de la question 1.

Ainsi, en ayant choisi une planche en résine, la probabilité qu'elle soit consolidée pour la saison suivante est bien de 0,15.

3) On cherche $\mathbb{P}(B)$. Les événements M et $\overline{M}$ forment un système complet d'événements (ou une partition de l'univers). D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(M \cap B) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap B) \\ &= \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(B) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(B) \\ &= 0{,}8 \times 0{,}75 + 0{,}2 \times 0{,}6 \\ &= 0{,}6 + 0{,}12 \\ &= 0{,}72.\end{aligned}$$

Or

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 > 0{,}72.$$

Donc, la gérante a tort.

Partie B

1) Dans ce jeu, il n'y a ni ordre ni répétition dans le tirage des boules. On utilisera donc des combinaisons.

Nombre de tirages possibles. Dans l'urne, il y a $n + 5$ boules (n boules rouges et 5 boules noires). On prend 2 boules dans l'urne simultanément. Il y a donc

$$\binom{n+5}{2}$$

tirages possibles.

Nombre de tirages gagnants. Pour gagner, il y a deux possibilités :

— soit on pioche deux boules rouges, ce qui donne $\binom{n}{2}$ possibilités ;

— soit on pioche deux boules noires, ce qui donne $\binom{5}{2}$ possibilités.

Les deux cas traités sont disjoints, donc le nombre de tirages gagnants vaut

$$\binom{n}{2} + \binom{5}{2}.$$

Comme les boules sont indiscernables au toucher, on a une probabilité uniforme sur les tirages. Ainsi,

$$p = \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}.$$

2) On a

$$\begin{aligned} p &= \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}} \\ &= \frac{\dfrac{5!}{2!(5-2)!} + \dfrac{n!}{2!(n-2)!}}{\dfrac{(n+5)!}{2!(n+5-2)!}} \\ &= \frac{\dfrac{5\times 4}{2\times 1} + \dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{(n+5)(n+4)}{2}} \\ &= \frac{\dfrac{20+n(n-1)}{2}}{\dfrac{(n+5)(n+4)}{2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$p = \frac{20+n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

3) On cherche n tel que $p < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\frac{20+n(n-1)}{(n+5)(n+4)} < \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(n+5)(n+4) > 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{20+n(n-1)}{(n+5)(n+4)} < \frac{1}{2} &\iff 2(20+n(n-1)) < (n+5)(n+4) \\ &\iff 40+2n^2-2n < n^2+9n+20 \\ &\iff n^2-11n+20 < 0. \end{aligned}$$

On résout l'inéquation $x^2-11x+20<0$ sur $\mathbb{R}$ afin d'en trouver les solutions entières. La fonction $x \mapsto x^2-11x+20$ est un polynôme de degré 2 avec $a=1$, $b=-11$ et $c=20$. Son discriminant vaut

$$\Delta = b^2-4ac = (-11)^2 - 4\times 1\times 20 = 121-80 = 41 > 0.$$

Il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{11+\sqrt{41}}{2} \approx 8{,}7, \qquad x_2 = \frac{11-\sqrt{41}}{2} \approx 2{,}3.$$

Comme $a>0$, le polynôme est négatif à l'intérieur des racines. Les solutions entières de l'inéquation sont donc

$$n \in \{3;4;5;6;7;8\}.$$

Ainsi, la gérante peut mettre entre 3 et 8 boules rouges dans l'urne.

Exercice 2

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \text{par croissances comparées,} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty,$$

donc, par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Par somme,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Ainsi, l'affirmation 1 est fausse.

2) La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x,$$
$$g''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$. Donc g'' est du signe de $x \mapsto x+2$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2.$$

Donc g'' est positive sur $[-2;+\infty[$, et g est convexe sur $[-2;+\infty[$.

Ainsi, l'affirmation 2 est vraie.

3) Pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$x \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sin(x) \geq 0.$$

Donc $x\sin(x) \geq 0$ et, par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Or $-\pi < 0$, donc

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x \neq -\pi.$$

Donc, l'affirmation 3 est fausse.

4) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = -3\mathrm{e}^{2x}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2h(x) - 5 &= 2\left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{2}\right) - 5 \\ &= -3\mathrm{e}^{2x} + 5 - 5 \\ &= -3\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = 2h(x) - 5.$$

Ainsi, h est solution de (E). De plus,

$$h(0) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^0 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1.$$

Donc, l'affirmation 4 est vraie.

5) Reprenons pas à pas l'exécution de `mystere(5)`. Initialement, $f = 1$.

k	Nouvelle valeur de f
1	$f \leftarrow f \times k = 1 \times 1 = 1$, donc $f = 1$
2	$f \leftarrow f \times k = 1 \times 2 = 2$, donc $f = 2$
3	$f \leftarrow f \times k = 2 \times 3 = 6$, donc $f = 6$
4	$f \leftarrow f \times k = 6 \times 4 = 24$, donc $f = 24$
5	$f \leftarrow f \times k = 24 \times 5 = 120$, donc $f = 120$

On obtient bien 120.

Donc, l'affirmation 5 est vraie.

Exercice 3

Partie A

1) On utilise la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_1 &= \ln(3u_0^2 + 1) \\ &= \ln(3 \times 2^2 + 1) \\ &= \ln(12 + 1). \end{aligned}$$

$$u_1 = \ln(13).$$

2) D'après le graphique, il semble que (u_n) soit croissante et converge vers une limite proche de 3,8.

3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Initialisation. On a

$$u_1 = \ln(13) \approx 2{,}56 \qquad \text{et} \qquad u_0 = 2.$$

Donc

$$2 \leq 2 \leq \ln(13) \leq 4,$$

c'est-à-dire

$$2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4.$$

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n, c'est-à-dire

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Les nombres sont positifs. Comme f est croissante sur $[0; +\infty[$, on peut l'appliquer membre à membre :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4).$$

Ainsi,

$$\ln(13) \leq \ln(3u_n^2 + 1) \leq \ln(3u_{n+1}^2 + 1) \leq \ln(49),$$

donc, d'après la relation de récurrence,

$$\ln(13) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ln(49).$$

Or, comme on l'a vu à l'initialisation, $\ln(13) \geq 2$, et

$$\ln(49) \approx 3{,}9 \leq 4.$$

Ainsi,

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

4) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \qquad \text{et} \qquad u_n \leq 4.$$

Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 4. D'après le théorème de convergence des suites monotones,

la suite (u_n) converge.

Partie B

1) Pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{6x}{3x^2+1} - 1 \\ &= \frac{6x - (3x^2+1)}{3x^2+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$g'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{3x^2+1}.$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 \geq 0$, donc $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Le signe de g' est donc celui de

$$P(x) = -3x^2 + 6x - 1.$$

Étudions le signe de P. C'est un polynôme de degré 2 avec $a = -3$, $b = 6$ et $c = -1$. Son discriminant vaut

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 36 - 12 = 24 > 0.$$

Il admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Comme $a = -3 < 0$, P est négatif à l'extérieur de ses racines. Or

$$1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}81 < 2.$$

Ainsi, g' est strictement négative sur $[2; 4]$.

Donc g est strictement décroissante sur $[2; 4]$.

3) La fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[2; 4]$. On a

$$g(2) = \ln(13) - 2 > 0$$

(car on a vu dans la partie A que $\ln(13) > 2$), et

$$g(4) = \ln(49) - 4 < 0.$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de g, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 4]$.

D'après la calculatrice,

$$g(3{,}782) \approx 1{,}55 \times 10^{-4} > 0, \qquad g(3{,}783) \approx -3{,}28 \times 10^{-4} < 0.$$

Ainsi,

$$3{,}782 < \alpha < 3{,}783.$$

$$\alpha \approx 3{,}78 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}$$

4) D'abord, d'après la partie A, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq u_n \leq 4.$$

Donc

$$2 \leq \ell \leq 4.$$

De plus, la suite (u_n) est convergente et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad \text{avec} \qquad f : x \longmapsto \ln(3x^2 + 1).$$

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$. Par passage à la limite dans la relation de récurrence,

$$\ell = f(\ell).$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$f(x) = x \iff \ln(3x^2 + 1) - x = 0 \iff g(x) = 0.$$

Or $\ell \in [2; 4]$ et, d'après la question 3, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 4]$.

Ainsi, $\ell = \alpha$.

Exercice 4

1) a) Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Donc les points A, B et C définissent un plan.

1) b) Montrons que le vecteur

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times (-1) + 8 \times 1 - 1 \times 3 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times (-3) + 8 \times 2 - 1 \times 1 = 0.$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

1) c) Comme $\vec{n}$ est normal au plan (ABC), une équation cartésienne de ce plan s'écrit

$$5x + 8y - z + d = 0,$$

où d est un réel. Cherchons d grâce au fait que $B \in (ABC)$. On a

$$5 \times 0 + 8 \times 3 - 2 + d = 0,$$

donc

$$22 + d = 0 \qquad \text{et} \qquad d = -22.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc

$$5x + 8y - z - 22 = 0.$$

1) d) Vérifions que les coordonnées de D ne satisfont pas l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$5 \times 8 + 8 \times 2 - (-11) - 22 = 40 + 16 + 11 - 22 = 45 \neq 0.$$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC).

2) a) La droite Δ est orthogonale au plan (ABC). Elle admet donc un vecteur directeur $\vec{n}$, car $\vec{n}$ est normal au plan (ABC). De plus, la droite Δ passe par le point D. Ainsi, une représentation paramétrique de Δ est

$$\begin{cases} x = 8 + 5t, \\ y = 2 + 8t, \\ z = -11 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2) b) On cherche E tel que ses coordonnées vérifient à la fois l'équation cartésienne du plan (ABC) et la représentation paramétrique de la droite Δ, car $E \in (ABC)$ et $E \in \Delta$. En notant $E(x;y;z)$, on a

$$\begin{cases} x = 8+5t, \\ y = 2+8t, \\ z = -11-t, \\ 5x+8y-z-22=0. \end{cases}$$

Par substitution,

$$\begin{aligned} 5(8+5t)+8(2+8t)-(-11-t)-22 &= 0 \\ 90t+45 &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$t = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$x = 8+5\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}, \quad y = 2+8\left(-\frac{1}{2}\right) = -2, \quad z = -11-\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{21}{2}.$$

On a donc bien

$$E\left(\frac{11}{2}; -2; -\frac{21}{2}\right).$$

2) c) On a

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2}-8 \\ -2-2 \\ -\frac{21}{2}+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+(-4)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{4}+16+\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{90}{4}} \\ &= 3\sqrt{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

$$DE = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

3) a) Le premier calcul du logiciel donne

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0,$$

où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (BC). Donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à la droite (BC).

Grâce au deuxième calcul, on remarque que le système admet une solution : le point H appartient donc à la droite (BC).

Ainsi, H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

3) b) On prend comme base le triangle ABC. Calculons son aire $\mathcal{B}$. Comme, d'après la question précédente, H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), on a

$$\mathcal{B} = \frac{BC \times AH}{2}.$$

Le troisième calcul du logiciel donne

$$AH = \sqrt{10},$$

et le quatrième donne

$$BC = 3.$$

Donc

$$\mathcal{B} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

La hauteur du tétraèdre relative à la base ABC est DE, car E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). D'après la question 2.c,

$$DE = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times DE \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \\ &= \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{15}{2}}.$$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.