Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du Baccalauréat Asie – 9 juin 2026

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 — 5 points

1. La valeur de p_1 est la probabilité d'atteindre le centre de la cible au premier tir.

D'après l'énoncé, cette probabilité est de $p_1 = \dfrac{1}{2}$.

Les deux phrases suivantes nous donnent, pour les tirs suivants :

$P_{T_n}(T_{n+1}) = \dfrac{4}{5}$ et $P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

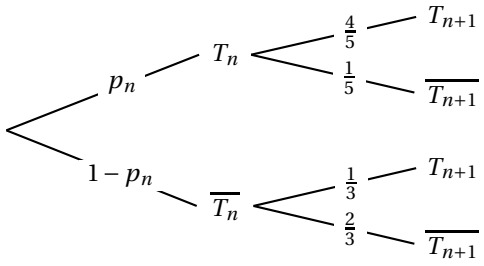
L'événement T_1 et son événement contraire $\overline{T_1}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$p_2 = P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2) = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1}) \times P_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{17}{30}$$

On arrive bien à $p_2 = \dfrac{17}{30}$.

2. L'arbre complété est donc :



3. Soit n un entier naturel non nul.

Les événements T_n et $\overline{T_n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1}) = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n}) \times P_{\overline{T_n}}(T_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} = p_n \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} - p_n \times \frac{1}{3} = p_n \times \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}$$

On a bien établi la relation de récurrence de la suite (p_n).

4. **a.** On va montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{7}{15}$, en établissant sa relation de récurrence.

Soit n un entier naturel non nul :

$u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{5}{8}$ d'après la définition de la suite (u_n)

$= \left(\dfrac{7}{15} p_n + \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{5}{8}$ d'après la relation de récurrence de la suite (p_n)

$= \dfrac{7}{15} p_n + \dfrac{8}{24} - \dfrac{15}{24} = \dfrac{7}{15} p_n - \dfrac{7}{24} = \dfrac{7}{15}\left(p_n - \dfrac{7}{24} \times \dfrac{15}{7}\right)$

$= \dfrac{7}{15}\left(p_n - \dfrac{5}{8}\right)$

$= \dfrac{7}{15} \times u_n$ à nouveau d'après la définition de la suite (u_n)

La relation de récurrence de la suite (u_n) est bien celle d'une suite géométrique de raison : $q = \dfrac{7}{15}$.

b. Le premier terme de la suite est : $u_1 = p_1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{8} = \dfrac{4}{8} - \dfrac{5}{8} = -\dfrac{1}{8}$.

Puisque (u_n) est géométrique, par propriété, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$$

c. En partant de la définition de la suite (u_n), pour un entier n naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned} u_n = p_n - \frac{5}{8} &\iff p_n = \frac{5}{8} + u_n \\ &\iff p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

5. Comme on a : $0 < \dfrac{7}{15} < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{15}\right)^{n-1} = 0$.

Par limite du produit, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{7}{15}\right)^{n-1} = 0$

Enfin, par limite de la somme, on conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{5}{8}$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre de tir important, la probabilité pour le titreur d'atteindre le centre de la cible se stabilise autour de $\dfrac{5}{8}$.

6. Pour que la fonction renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que p_n soit supérieur ou égal à 0,6, il faut que la boucle `while` dans laquelle on va actualiser les valeurs de l'indice et du terme de la suite (p_n) tourne tant que p_n n'est pas supérieur ou égal à 0,6, c'est-à-dire tant que le terme de (p_n) est strictement inférieur à 0,6.

Cela donne donc :

```
def seuil():
  n = 1
  p = 0.5
  while p < 0.6 :
    n = n + 1
    p = p*7/15 + 1/3
  return n
```

7. Résolvons dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0{,}6 &\iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant 0{,}6 \\ &\iff -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant 0{,}6 - \frac{5}{8} \\ &\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant -8 \times \left(0{,}6 - \frac{5}{8}\right) \quad \text{car } -8 < 0 \\ &\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant -4{,}8 + 5 \\ &\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant 0{,}2 \\ &\iff \ln\left(\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}\right) \leqslant \ln(0{,}2) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff (n-1)\ln\left(\frac{7}{15}\right) \leqslant \ln(0{,}2) \quad \text{par propriété de la fonction ln} \end{aligned}$$

$$p_n \geqslant 0{,}6 \iff n-1 \geqslant \frac{\ln(0{,}2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$$
$$\iff n \geqslant 1 + \frac{\ln(0{,}2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)}$$

Or $1 + \dfrac{\ln(0{,}2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \approx 3{,}1$.

Comme on résout dans $\mathbb{N}$, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 4.

C'est donc à partir de quatre lancers que l'archer a une probabilité d'atteindre le centre de la cible supérieure ou égale à 0,6.

Remarque : si on exécute la fonction `seuil`, elle renvoie effectivement 4.

EXERCICE 2 — 5 points

1. **Affirmation 1 : Vraie**

Pour tout x réel strictement supérieur à 1, on a : $x-1>0 \implies (x-1) = \sqrt{(x-1)^2}$.

On en déduit : $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}} = \sqrt{\dfrac{x^2\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Par limites usuelles, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Par limite de la somme on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x^2} = 1$.

Par limite du produit et du quotient, on a ensuite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1^2}{1} = 1$.

Et enfin, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{y\to 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1$.

La fonction f admet bien 1 pour limite en $+\infty$.

2. **Affirmation 2 : Vraie**

Pour tout entier naturel n, posons P_n l'affirmation : « $w_n = (n+1)^2$ ».

Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :** On a d'une part : $w_0 = 1$;
  et d'autre part : $(0+1)^2 = 1$.
  On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel. On suppose que l'affirmation P_n est vraie.

P_n est vraie $\Longrightarrow w_n = (n+1)^2$

$\Longrightarrow w_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$

$\Longrightarrow w_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3$ en utilisant la relation de récurrence de (w_n)

$\Longrightarrow w_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$\Longrightarrow w_{n+1} = n^2 + 4n + 4$

$\Longrightarrow w_{n+1} = (n+2)^2$

$\Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_0 est vraie, et que pour un n entier naturel, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n, l'affirmation est vraie, et donc on a établi une expression explicite du terme général de la suite (w_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (n+1)^2$$

3. Affirmation 3 : Vraie

Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 1$, et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 3 et p.

On a, par propriété : $P(X=1) = \binom{3}{1} \times p^1 \times (1-p)^{3-1}$

$= 3 \times p \times (1-p)^2$

$= 3p(1-2p+p^2)$

$= 3p - 6p^2 + 3p^3$.

La probabilité de l'évènement $(X=1)$ est bien : $P(X=1) = 3p - 6p^2 + 3p^3$.

4. Affirmation 4 : Fausse

Soit n un entier naturel n non nul.

Une primitive sur $[0;1]$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{nx}$ est : $x \longmapsto \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{nx}$.

On a donc : $v_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\mathrm{e}^{nx}\right]_0^1 = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{n\times 1} - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{n\times 0} = \dfrac{\mathrm{e}^n - 1}{n} \neq \dfrac{\mathrm{e}^n}{n}$.

5. Affirmation 5 : Fausse

Chacune des 16 cases est coloriée, donc à condition de numéroter les 16 cases, en associant à chaque case la couleur utilisée, cela revient à associer aux entiers de 1 à 16 une couleur.

Chaque coloriage est ainsi assimilable à une 16-liste d'éléments choisis dans l'ensemble des couleurs, qui est de cardinal 3 (puisque trois couleurs sont à notre disposition). Les éléments peuvent se répéter, puisque nous devons colorier 16 cases avec trois couleurs, donc on devra utiliser la même couleur plusieurs fois.

Le nombre de k-listes d'éléments d'un ensemble de cardinal n est : n^k.

Il y a donc $3^{16} = 43\,046\,721$ coloriages différents possibles.

$\binom{16}{3} = 560 \neq 43\,046\,721$. Ce nombre pourrait correspondre au nombres de façons qu'il y a de choisir 3 cases parmi les 16 cases du quadrillage.

Remarque : On peut aussi raisonner en disant qu'on a 3 choix de couleur pour la première case, à multiplier par 3 choix pour la deuxième case, et ainsi de suite, on retrouve bien 3^{16} choix possibles pour colorier nos 16 cases.

EXERCICE 3 — 5 points

1. **a.** On a : $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}3-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ Et : $\overrightarrow{\text{BE}}\begin{pmatrix}2-1\\-2-2\\2-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{BE}}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc les trois points B, C et E ne sont pas alignés.

Ils définissent donc un plan (BCE).

b. On a : $\overrightarrow{\text{AF}}\begin{pmatrix}3-0\\0-0\\4-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AF}}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\overrightarrow{\text{AF}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 3\times 2+0\times 1+3\times(-2) = 6+0-6 = 0$. $\overrightarrow{\text{AF}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont orthogonaux;
- $\overrightarrow{\text{AF}}\cdot\overrightarrow{\text{BE}} = 3\times 1+0\times(-4)+3\times(-1) = 3+0-3 = 0$ $\overrightarrow{\text{AF}}$ et $\overrightarrow{\text{BE}}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{\text{AF}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (BCE), donc il est normal au plan (BCE).

c. Par propriété, on en déduit qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est de la forme $3\times x+0\times y+3\times z+d = 0$.

B étant un point du plan (BCE), ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan.

$$\begin{aligned}\text{B}\in(\text{BCE}) &\iff 3\times 1+3\times 3+d = 0\\ &\iff 12+d = 0\\ &\iff d = -12\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est donc $3x+3z-12 = 0$.

En simplifiant chaque membre de cette équation par 3 (qui est non nul), on obtient une équation équivalente, donc une équation du plan (BCE) est bien : $x+z-4 = 0$.

2. **a.** Voyons si les coordonnées de G vérifient l'équation du plan :

$x_{\text{G}}+z_{\text{G}}-4 = 5+2-4 = 2 \iff 3 = 2$égalité fausse

Les coordonnées de G ne vérifient pas l'équation du plan (BCE) donc le point G n'appartient pas au plan (BCE).

b. Comme $\overrightarrow{\text{BE}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ ne sont pas colinéaires (prouvé à la question **1. a.**), on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\text{BE}}$, $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ sont coplanaires si et seulement si on peut exprimer $\overrightarrow{\text{AG}}$ comme combinaison linéaire des deux autres vecteurs.

Autrement dit, si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{\text{AG}} = a\overrightarrow{\text{BC}}+b\overrightarrow{\text{BE}}$.

On a : $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{\text{AG}} = a\overrightarrow{\text{BC}}+b\overrightarrow{\text{BE}} \iff \begin{cases}2a+b = 5\\a-4b = 1\\-2a-b = 1\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}b = 5-2a\\a-4(5-2a) = 1\\-2a-(5-2a) = 1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}b = 5-2a\\9a-20 = 1\\-5 = 1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}b = 5-2a\\9a = 21\\4a = 6\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BE} \iff \begin{cases} b = 5 - 2a \\ a = \dfrac{7}{3} \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Les équations du système ne sont pas compatibles, donc le système n'a pas de solution.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

c. La droite (AG) est dirigée par $\overrightarrow{AG}$, qui n'est pas un vecteur du plan (BCE), donc la droite (AG) n'est pas parallèle au plan (ni strictement parallèle, ni incluse dans le plan).

Une droite et un plan n'ont que trois positions relatives possibles, et on vient de justifier que deux ne sont pas possibles.

Par élimination, on peut conclure que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

3. **a.** Par propriété, une représentation paramétrique de (AG) est : $\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AG}} \times t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AG}} \times t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AG}} \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

En remplaçant par le coordonnées connues, cela donne : $\begin{cases} x = 0 + 5 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + 1 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

On a donc bien une représentation paramétrique de (AG) qui est : $\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b. Par définition, le point P est un point de (AG).

Ses coordonnées sont donc de la forme $(5t\ ;\ t\ ;\ 1+t)$ avec un t réel.

Comme c'est aussi un point du plan (BCE), ces coordonnées doivent vérifier l'équation du plan :

$$\begin{aligned} x_P + z_P - 4 = 0 &\iff 5t + (1+t) - 4 = 0 \\ &\iff 6t = 3 \\ &\iff t = 0{,}5 \end{aligned}$$

P a donc pour coordonnées : $(5 \times 0{,}5\ ;\ 0{,}5\ ;\ 1 + 0{,}5)$ soit $(2{,}5\ ;\ 0{,}5\ ;\ 1{,}5)$.

c. Le milieu du segment [EC] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_E + x_C}{2} ; \dfrac{y_E + y_C}{2} ; \dfrac{z_E + z_C}{2}\right)$.

En remplaçant par les valeurs connues : $\left(\dfrac{2+3}{2} ; \dfrac{-2+3}{2} ; \dfrac{2+1}{2}\right)$

En effectuant les calculs, on retrouve $(2{,}5\,;0{,}5\,;1{,}5)$ c'est-à-dire les coordonnées de P.

P est donc bien le milieu de [EC].

4. Les plans (BCE) et (ACG) sont sécants, en effet :

- ils ont le point C en commun, de façon évidente : on en déduit que les plans ne sont pas strictement parallèles ;
- ils ne sont pas confondus, car le point G est inclus dans (ACG), mais pas dans (BCE) (prouvé à la question **2. a.**).

Deux plans sécants ont une intersection qui est une droite, que l'on va nommer d.

- P étant par définition sur la droite (AG), il est un point de (ACG) ;
- P est aussi par définition un point du plan (BCE).

P est donc un autre point commun aux plans (ACG) et (BCE), donc la droite (CP) est incluse dans l'intersection des plans (ACG) et (BCE).

Comme cette intersection est réduite à une droite, on en déduit que :

l'intersection des plans (BCE) et (ACG) est la droite (CP).

EXERCICE 4 — 5 points

1. **a.** On dérive les deux termes de g, l'un des deux étant un produit.

On rappelle les dérivées connues : $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

$\forall x \in [0\,;2\pi]$, $g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times \big(-\sin(x)\big) - \cos(x) = -x\sin(x)$.

b. Commençons par calculer les images de 0, π et 2π. On connaît les valeurs particulières des fonctions sinus et cosinus.

- $g(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0 \times 1 - 0 = 0$;
- $g(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi$;
- $g(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = 2\pi$.

Les trois images sont donc validées.

Étudions maintenant les variations de g.

- sur $[0\,;2\pi]$, $-x$ est négatif, et même strictement négatif sur $]0\,;2\pi]$;
- sur $[0;\pi]$, $\sin(x)$ est positif, et même strictement positif sur $]0;\pi[$ (c'est la moitié du cercle trigonométrique qui est au dessus de l'axe des abscisses, donc les sinus sont positifs) ;
- sur $[\pi\,;2\pi]$, $\sin(x)$ est négatif, et même strictement négatif sur $]\pi\,;2\pi[$ (c'est la moitié du cercle trigonométrique qui est en-dessous de l'axe des abscisses, donc les sinus sont négatifs).

On peut résumer cela avec un tableau de signes. Quand la dérivée est à valeurs négatives, la fonction est strictement décroissante (car la dérivée ne s'annule que ponctuellement), et quand la dérivée est à valeurs positives, la fonction est strictement croissante.

On a donc :

x	0		π		2π
signe de $-x$	0	$-$		$-$	
signe de $\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
signe de $g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
variations de g	0	↘	$-\pi$	↗	2π

On a ainsi justifié chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

c. La fonction g est continue (car dérivable) sur $[\pi\,;2\pi]$, sur cet intervalle, elle est strictement croissante.

De plus, 0 est une valeur intermédiaire entre $f(\pi) = -\pi$ et $f(2\pi) = 2\pi$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution à l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$, solution que l'on note α.

d. On peut étoffer le tableau de variations précédent avec α

x	0		π	α	2π
variations de g	0	↘	$-\pi$	↗ 0 ↘	2π

Sur $[0\,;\alpha]$, la fonction g est majorée par 0, elle est donc à valeurs négatives, puis sur $[\alpha\,;2\pi]$, elle est minorée par 0, et donc g est à valeurs positives.

On a donc le tableau de signes suivant :

x	0		α		2π
signe de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	

2. **a.** On va utiliser la formule de dérivation d'un quotient :

$\forall x \in]0\,;2\pi], \quad f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} = \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. La fonction f' est le quotient de la fonction g étudiée à la question **1.** par la fonction carré. On a donc :

x	0		α		2π
signe de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	
signe de x^2	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

c. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;2\pi]$.

d. Pour tout réel x non nul, le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x est :

$$\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \frac{\sin(x)-0}{x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$

Comme la fonction sinus est dérivable en 0, ce taux d'accroissement admet donc une limite finie quand x tend vers 0. Par définition du nombre dérivé, cette limite est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0.

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

f tend vers 1 quand x tend vers 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.

Comme $\alpha \in [\pi\,;2\pi]$, on en déduit que : $\pi \leqslant \alpha$.

Donc les réels r et s sont dans un intervalle où la fonction f est strictement décroissante, et la fonction sinus à valeurs strictement positives :

$$\begin{aligned}
0 < r < s < \pi &\Longrightarrow f(r) > f(s)\\
&\Longrightarrow \frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s}\\
&\Longrightarrow \frac{\sin(r)}{r\times\sin(s)} > \frac{1}{s} \quad \text{car } s\in]0\,;\pi[\text{ donc } \sin(s)>0\\
&\Longrightarrow \frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s} \quad \text{car } r\in]0\,;\pi[\text{ donc } r>0
\end{aligned}$$

On a bien établi, pour r et s vérifiant $0 < r < s < \pi$: $\dfrac{r}{s} < \dfrac{\sin(r)}{\sin(s)}$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.