Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat Centres Étrangers – 10 juin 2026

Corrigé du sujet 1

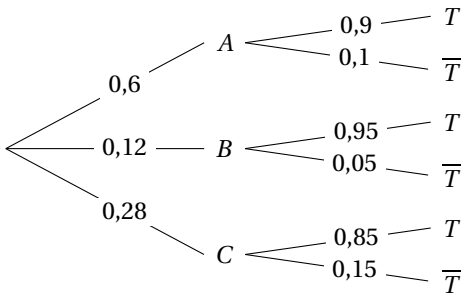
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 — 5 points

Partie A

1. L'arbre de probabilité représentant la situation est :



2. $P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T}) = 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}06$

Dans le contexte de l'exercice, la probabilité que la lame provienne du fournisseur A et ne soit pas conforme est égale à 0,06.

3. Les événements A, B et C forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales on a :

$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$

$= 0{,}6 \times 0{,}9 + 0{,}12 \times 0{,}95 + 0{,}28 \times 0{,}85$

$= 0{,}892$

La probabilité que la lame testée soit conforme est donc bien égale à 0,892.

4. Déterminer la probabilité qu'une lame provienne du fournisseur B sachant qu'elle n'est pas conforme revient à calculer $P_{\overline{T}}(B)$.

$P_{\overline{T}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}12 \times 0{,}05}{1 - 0{,}892} = \dfrac{0{,}006}{0{,}108} \approx 0{,}055\,556$

La probabilité,arrondie au millième, que la lame provienne du fournisseur B sachant que la lame testée n'est pas conforme est égale à 0,056.

Partie B

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, de paramètres $n = 75$ et $p = 0{,}108$.

Remarque : ici, on a une rédaction plus légère, car l'énoncé demande d'admettre que X suit une loi binomiale. Sinon, il faudrait les trois arguments classiques :

- On a une épreuve à deux issues, succès de probabilité $p = 0{,}108$ et échec ;
- cette épreuve est répétée $n = 75$ fois, de façon identique et indépendante (car la constitution de l'échantillon est assimilé à un tirage au sort **avec** remise) ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

2. $P(X = 6) = \binom{75}{6} \times 0{,}108^6 \times (1 - 0{,}108)^{75-6} = \binom{75}{6} \times 0{,}108^6 \times 0{,}892^{69} \approx 0{,}120\,140\,6$

La probabilité que 6 lames exactement soient non conformes dans cet échantillon est égale à 0,120, résultat arrondi au millième.

3. $P(X > 8) = P(X \geqslant 9) \approx 0{,}422$

Or $0{,}42 < 0{,}5$ donc l'équipementier a raison : la probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes dans cet échantillon est inférieure à 50%.

Partie C

1. M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X on a donc :

$E(M_n) = E(X) = np$

$= 75 \times 0{,}108$ car X suit une loi binomiale de paramètres 75 et 0,108

$= 8{,}1$

et $V(M_n) = \dfrac{1}{n}V(X)$

$= \dfrac{75 \times 0{,}108 \times (1-0{,}108)}{n}$ car X suit une loi binomiale de paramètres 75 et 0,108

$= \dfrac{7{,}2252}{n}$

2. D'après l'inégalité de concentration, pour tout entier n non nul :

$\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\Big(\big|M_n - E(X)\big| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(X)}{nt^2}$.

Avec $t = 2$ on a : $P\Big(\big|M_n - 8{,}1\big| \geqslant 2\Big) \leqslant \dfrac{7{,}2252}{n \times 2^2}$.

Soit : $P(|M_n - 8{,}1| \geqslant 2) \leqslant \dfrac{1{,}8063}{n}$ qui est l'inégalité demandée.

3. $P(|M_n - 8{,}1| < 2) \geqslant 0{,}95 \iff 1 - P(|M_n - 8{,}1| < 2) \leqslant 1 - 0{,}95.$

$\iff P(|M_n - 8{,}1| \geqslant 2) \leqslant 0{,}05$

Or $P(|M_n - 8{,}1| \geqslant 2) \leq \dfrac{1{,}8063}{n}$ donc nous recherchons des entiers n tels que $\dfrac{1{,}8063}{n} \leqslant 0{,}05$

$\dfrac{1{,}8063}{n} \leqslant 0{,}05 \iff \dfrac{1{,}8063}{0{,}05} \leqslant n$

$\Longrightarrow 36{,}126 \leqslant n$.

$\Longrightarrow 37 \leqslant n$

donc à partir de 37, on a $P(|M_n - 8{,}1| < 2) \geqslant 0{,}95$

Dans le contexte de l'exercice, si l'équipementier est présent à au moins 37 compétitions, on peut affirmer, au risque de 5%, que la moyenne observée des lames non conformes sera comprise entre 6,1 et 10,1.

EXERCICE 2 — 5 points

1. L'affirmation 1 est vraie

Pour tout réel x, $f'(x) = -4\,\mathrm{e}^{x} - \sin(x) + \cos(x)$

Donc pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = -4\,\mathrm{e}^{x} - \sin(x) + \cos(x) + 4\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x) = 2\cos(x)$

donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)\quad$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = 2\cos(x)$.

2. L'affirmation 2 est vraie

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = 2x \quad$ et $\quad g(x) = \sin(x)$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x) = 2x - \sin(x)$.

On aura $f(x) = g(x)$ si et seulement si $h(x) = 0$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a $h'(x) = 2 - \cos(x)$.

Or pour tout réel x, $\cos(x) \leqslant 1$ donc $h'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De plus $h(0) = 2\times 0 - \sin(0) = 0 - 0 = 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution qui sera unique d'après la stricte monotonie..

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point d'intersection, le point d'abscisse 0.

3. L'affirmation 3 est fausse

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n+\sin(n)}{n+1}$$

Pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 &\Longrightarrow 2n-1 \leqslant 2n+\sin(n) \leqslant 2n+1\\
&\Longrightarrow \frac{2n-1}{n+1} \leqslant \frac{2n+\sin(n)}{n+1} \leqslant \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{car } n+1>0\\
&\Longrightarrow \frac{2n+2-3}{n+1} \leqslant \frac{2n+\sin(n)}{n+1} \leqslant \frac{2n+2-1}{n+1}\\
&\Longrightarrow 2-3\times\frac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-3\times\dfrac{1}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n+1} = 2$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

La suite (v_n) converge vers 2.

4. L'affirmation 4 est vraie

Pour tout entier naturel non nul n, posons P_n l'affirmation : « $u_n = n^2$ ».

Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :** On a d'une part : $u_1 = 1$;
  et d'autre part : $1^2 = 1$.
  On constate donc que l'affirmation P_1 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie.
  $$\begin{aligned}
  P_n \text{ est vraie} &\Longrightarrow u_n = n^2\\
  &\Longrightarrow u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1\\
  &\Longrightarrow u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 \quad \text{en utilisant la relation de récurrence de } (u_n)\\
  &\Longrightarrow u_{n+1} = (n+1)^2\\
  &\Longrightarrow P_{n+1} \text{ est vraie.}
  \end{aligned}$$
- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_1 est vraie, et que pour un n entier naturel non nul, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, l'affirmation est vraie, et donc on a établi une expression explicite du terme général de la suite (u_n) :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n^2$$

Autre démonstration

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = n^2$.

- $v_1 = 1^2 = 1$
- $v_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = v_n + 2n + 1$

Les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme $u_1 = v_1 = 1$, et verifient la même relation de récurrence, donc elles sont identiques. On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n = n^2$.

5. L'affirmation 5 est vraie

Pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-n} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$, donc la suite u est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

S_n est donc la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.

On a donc, pour tout entier n, $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \times \left(1-\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1}\right)$

Or $0 < \mathrm{e}^{-1} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1} = 0$

donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

EXERCICE 3 — 4 points

1. ABCDEFGH est un cube donc, dans le repère $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on a :

A(0 ; 0 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) F(1 ; 0 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

I est le milieu du segment [EF] donc $x_I = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $y_I = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0$ et $z_I = \dfrac{z_E + z_F}{2} = \dfrac{1+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Donc I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$

Par le même raisonnement on a : J $\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; 1\right)$ et K $\left(0 ; 0 ; \dfrac{1}{2}\right)$

2. **a.** On a : $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \begin{pmatrix} x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{I} - y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{I} - z_\mathrm{A} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} \begin{pmatrix} x_\mathrm{J} - x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{J} - y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{J} - z_\mathrm{A} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, le produit scalaire peut se calculer avec la formule analytique : $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \dfrac{1}{2} \times 0 + 0 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times 1 = 1$.

b. Comme on est dans un repère orthonormé :

$\mathrm{AI} = \sqrt{x_{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}^2 + y_{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}^2 + z_{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 0 + 1} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

et de même : $\mathrm{AJ} = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{0\dfrac{1}{4} + 1} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

L'expression trigonométrique du produit scalaire donne :

$\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \mathrm{AI} \times \mathrm{AJ} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{IAJ}}\right)$

donc, avec les valeurs connues : $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{IAJ}}\right)$

$= \dfrac{5}{4} \cos\left(\widehat{\mathrm{IAJ}}\right)$

On a donc deux expressions du même produit scalaire, ce qui donne :

$1 = \dfrac{5}{4} \cos\left(\widehat{\mathrm{IAJ}}\right) \iff \cos\left(\widehat{\mathrm{AIJ}}\right) = \dfrac{4}{5}$

D'où : $\widehat{\mathrm{AIJ}} \approx 36{,}9°$ au dixième de degré près.

3. **a.** On a : $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

On a : $\overrightarrow{\text{KC}}\begin{pmatrix} x_\text{C}-x_\text{K} \\ y_\text{C}-y_\text{K} \\ z_\text{C}-z_\text{K}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{KC}}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{KC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormal, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\overrightarrow{\text{KC}}\cdot\overrightarrow{\text{AI}} = 1\times\dfrac{1}{2}+1\times 0-\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$. $\overrightarrow{\text{KC}}$ et $\overrightarrow{\text{AI}}$ sont orthogonaux;
- $\overrightarrow{\text{KC}}\cdot\overrightarrow{\text{AJ}} = 1\times 0+1\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times(-1)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$ $\overrightarrow{\text{KC}}$ et $\overrightarrow{\text{AJ}}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{\text{KC}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (AIJ), donc il est normal au plan (AIJ).

b. Par propriété, on en déduit qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est de la forme $1\times x+1\times y-\dfrac{1}{2}\times z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

A étant un point du plan (AIJ), ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan.

$$\begin{aligned}\text{A}\in(\text{AIJ}) &\iff 1\times 0+1\times 0-\frac{1}{2}\times 0+d=0\\ &\iff 0+d=0\\ &\iff d=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est donc bien $x+y-\dfrac{1}{2}z=0$.

4. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{\text{KC}}$ est un vecteur normal au plan (AIJ) donc la droite (KC) est orthogonale au plan (AIJ).

Le point L, projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ) sera donc l'intersection du plan (AIJ) et de la droite (KC).

La droite (KC) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{\text{KC}}$ et passe par le point C donc une représentation paramétrique de la droite (KC) est :

$$\begin{cases} x=1+1\times t\\ y=1+1\times t\\ z=0-\dfrac{1}{2}t\end{cases}\qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

L est un point de la droite (KC) donc ses coordonnées sont donc de la forme $\left(1+t\,;1+t\,;-\dfrac{1}{2}t\right)$ avec un t réel.

Comme c'est aussi un point du plan (AIJ), ces coordonnées doivent vérifier l'équation du plan :

$$\begin{aligned}x_\text{L}+y_\text{L}-\frac{1}{2}z_\text{L}=0 &\iff (1+t)+(1+t)-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}t\right)=0\\ &\iff 2t+\frac{1}{4}t=-2\\ &\iff \frac{9}{4}t=-2\\ &\iff t=-\frac{8}{9}\end{aligned}$$

L a donc pour coordonnées : $\left(1-\dfrac{8}{9}\,;1-\dfrac{8}{9}\,;-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-8}{9}\right)$ soit $\left(\dfrac{1}{9}\,;\dfrac{1}{9}\,;\dfrac{4}{9}\right)$.

b. L est le projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ) donc la distance du point C au plan (AIJ) est égale à CL.

Comme on est dans un repère orthonormal :

$$\text{CL} = \sqrt{(x_\text{L}-x_\text{C})^2+\left(y_\text{L}-y_\text{C}\right)^2+(z_\text{L}-z_\text{C})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{4}{9}-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{81}+\frac{64}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

5. **a.** On a : $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} x_\text{M}-x_\text{I} \\ y_\text{M}-y_\text{I} \\ z_\text{M}-z_\text{I}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ m-0 \\ 1-1\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0\end{pmatrix}$.

La droite (IM) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{\text{IM}}$ et passe par le point I donc une représentation paramétrique de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times s \\ y = 0+m\times s \\ z = 1+0\times s\end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R} \qquad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times s \\ y = ms \\ z = 1\end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R}$$

b. Un vecteur directeur de la droite (KC) est : $\overrightarrow{\text{KC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite (IM) est : $\overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites (IM) et (KC) ne sont pas parallèles.

Recherchons un point d'intersection éventuel.

Les droites (IM) et (KC) sont sécantes si et seulement si le système (S) : $\begin{cases} 1+t = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s \\ 1+t = ms \\ -\frac{1}{2}t = 1\end{cases}$

admet une solution.

$$\begin{cases} 1+t = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s \\ 1+t = ms \\ -\frac{1}{2}t = 1\end{cases} \iff \begin{cases} 2+2t = 1+s \\ 1+t = ms \\ t = -2\end{cases} \iff \begin{cases} 2-4-1 = s \\ 1-2 = ms \\ t = -2\end{cases} \iff \begin{cases} s = -3 \\ m = \frac{1}{3} \\ t = -2\end{cases}$$

Le système (S) admet donc une unique solution pour $m = \frac{1}{3}$ et pas de solution sinon.

Les droites (IM) et (KC) sont donc coplanaires uniquement pour $m = \frac{1}{3}$.

Donc les droites (IM) et (KC) ne sont pas coplanaires quelle que soit la valeur de m.

EXERCICE 4 — 6 points

Partie A

1. **a.**
- Limite en 0^+ :
  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+\end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
- Limite en $+\infty$:
  Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

donc la droite d'équation $x = 0$, c'est à dire l'axe des ordonnées, est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

donc la droite d'équation $y = 0$, c'est à dire l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2. Pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \ln(x) \times x^{-2}$.

f est de la forme $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^{-2} \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = -2x^{-3} \end{cases}$.

$f' = u'v + v'u$ donc pour tout réel strictement positif x :

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \times x^{-2} + \ln(x) \times (-2x^{-3})$

$= \dfrac{1}{x} \times 1x^2 - \ln(x) \times \dfrac{2}{x^3}$

$= \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2\ln(x)}{x^3}$

$= \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

3. x est strictement positif donc x^3 aussi donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$.

$1 - 2\ln(x) > 0 \iff 1 > 2\ln(x)$

$\iff 1 > \ln(x^2)$

$\iff \mathrm{e} > x^2$

$\iff \sqrt{\mathrm{e}} > x \quad$ car $x > 0$

$f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})}{\sqrt{\mathrm{e}}^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

Le tableau de variations est donc :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	↘	0

4. L'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour $a = 1$:

$f'(1) = \dfrac{1 - 2\ln(1)}{1^3} = \dfrac{1 - 2 \times 0}{1} = 1 \quad$ et $\quad f(1) = \dfrac{\ln(1)}{1^2} = \dfrac{0}{1} = 0.$

Donc : $y = 1(x - 1) + 0$ soit $y = x - 1$.

L'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est : $y = x - 1$.

5. Pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = (1 - 2\ln(x)) \times x^{-3}$.

f' est de la forme $g \times h$ avec $\begin{cases} g(x) = 1 - 2\ln(x) \\ h(x) = x^{-3} \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} g'(x) = 0 - 2 \times \dfrac{1}{x} \\ h'(x) = -3x^{-4} \end{cases}$.

$f'' = g'h + h'g$ donc pour tout réel strictement positif x :

$f''(x) = \dfrac{-2}{x} \times x^{-3} + (1 - 2\ln(x)) \times (-3x^{-4}) = \dfrac{-2}{x} \times 1x^3 - (1 - 2\ln(x)) \times \dfrac{3}{x^4}$

$= \dfrac{-2}{x^4} - \dfrac{3(1 - 2\ln(x))}{x^4} = \dfrac{-2 - 3 + 6\ln(x)}{x^4} = \dfrac{-5 + 6\ln(x)}{x^4}$

On a bien, pour tout réel strictement positif x, $f''(x) = \dfrac{-5+6\ln(x)}{x^4}$.

6. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f, il faut étudier le signe de la dérivée seconde.
Sur $]0;+\infty[$, $x^4 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-5+6\ln(x)$.
$-5+6\ln(x) > 0 \iff 6\ln(x) > 5$
$\iff \ln(x) > \dfrac{5}{6}$
$\iff x > \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$
On a donc :
$f''(x)$ est négatif sur $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ et positif sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$.
donc f est concave sur $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ et convexe sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$.
f'' s'annule en changeant de signe en $\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$ et $f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{5}{6}2}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\mathrm{e}^{\frac{10}{6}}} = \dfrac{5}{6\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}$
Donc le point $\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};\dfrac{5}{6\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}\right)$ est un point d'inflexion pour f.

b. f est concave sur $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ donc, sur cet intervalle, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ces tangentes, en particulier, en dessous de la tangente au point A (car $0 < 1 < \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$).
Donc pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$:
$f(x) \leqslant x-1 \iff \dfrac{\ln(x)}{x^2} \leqslant x-1$

7. Donc pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$:

- Pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$: $f(x) \leqslant x-1$ et donc, en particulier, $f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}-1$.
- $\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et f est décroissante sur $\left[\sqrt{e};+\infty\right[$ donc pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$, $f(x) \leqslant f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)$
- Pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$, $x-1 \geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}-1$

Pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$, on a donc : $x-1 \geqslant \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}-1 \geqslant f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right) \geqslant f(x)$
Soit $x-1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel non nul n :

- $1 \leqslant n$
- Sur l'intervalle $[1;n]$, $\ln(x) \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 1$ donc $f(x) \geqslant 0$

donc I_n est égale à l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par :

- la courbe $\mathscr{C}_f$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_n^1 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
$= \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$
Or, sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.
La suite (I_n) est donc croissante.

3. On souhaite calculer une approximation de $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique.

Soit i un entier compris entre 1 et 9.
Le i-ème rectangle a pour largeur 1 et pour hauteur le maximum de $f(x)$ pour $x \in [i\,;1+1]$
Le premier rectangle a pour aire : $1 \times f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$
ce qui est déjà stocké dans la variable S par la ligne : `S = 1 /(2 * exp(1))`
Pour les rectangles suivants, la fonction f étant décroissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, la hauteur sera $f(i)$ soit $\dfrac{\ln(i)}{i^2}$
Pour i allant de 2 à 9, il faut donc rajouter à S, la valeur du i-ème rectangle soit $\dfrac{\ln(i)}{i^2}$.
Remarque : en langage Python la commande log(c) renvoie la valeur de $\ln(c)$.
Le programme complété est donc :

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
  S = S + log(i)/(i**2)
print(S)
```

4. $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[1\,;n]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1\,;n]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où $I_n = \left[\dfrac{-1}{x} \times \ln(x)\right]_1^n - \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x} \times \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n} \times \ln(n) - \frac{-1}{1} \times \ln(1) - \int_1^n \frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{-\ln(n)}{n} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{\ln(n)}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1}\right) = -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n}{n}$$

$$= \frac{-\ln(n) - 1 + n}{n}$$

pour tout entier naturel non nul n on a donc bien : $I_n = \dfrac{n-1-\ln(n)}{n}$.

5. $I_n = \dfrac{n-1-\ln(n)}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \text{Par croissances comparées,} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0 \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.