Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale)

Corrigé

Voie générale – spécialité J2 – Métropole – 17 juin 2026

A. P. M. E. P.

Exercice 1 (5 points)

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} x_\text{B}-x_\text{A} \\ y_\text{B}-y_\text{A} \\ z_\text{B}-z_\text{A}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1\end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1\end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

2. **a.** On est dans un repère orthonormé, donc on peut utiliser la formule analytique du produit scalaire :

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 1\times 1 - 1\times(-3) + 4\times(-1) = 1+3-4 = 0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 1\times(-2) - 1\times(-2) + 4\times 0 = -2+2+0 = 0$;
- $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (ABC).
  $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs, donc c'est un vecteur normal du plan (ABC).

b. Si $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4\end{pmatrix}$ est normal à (ABC), alors, par propriété, une équation de (ABC) peut avoir la forme :

$1\times x + (-1)\times y + 4\times z + d = 0$, où d est un réel.

Comme A est un point de (ABC), on doit avoir : $x_\text{A} - y_\text{A} + 4z_\text{A} + d = 0$.

$$\begin{aligned} x_\text{A} - y_\text{A} + 4z_\text{A} + d = 0 &\iff 2 - 1 + 4\times 1 + d = 0 \\ &\iff 5 + d = 0 \\ &\iff d = -5 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (ABC) est donc bien : $x - y + 4z - 5 = 0$.

3. Si la droite Δ est orthogonale au plan (ABC), alors, par définition, elle doit être dirigée par un vecteur normal au plan (ABC), donc ici, on en déduit que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4\end{pmatrix}$ dirige la droite Δ.

Comme la droite Δ passe par le point D(0 ; 0 ; 2), une représentation paramétrique de la droite Δ est donnée par : $\begin{cases} x = x_\text{D} + x_{\vec{n}} \times t \\ y = y_\text{D} + y_{\vec{n}} \times t \\ z = z_\text{D} + z_{\vec{n}} \times t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

En remplaçant par les valeurs connues, on a bien : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

4. Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Comme c'est un point de la droite Δ, il existe un réel t_0 tel que les coordonnées de ce point sont $(t_0\,;-t_0\,;2+4t_0)$.

C'est aussi un point de (ABC) sont ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

Autrement dit, t_0 est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} t_0-(-t_0)+4(2+4t_0)-5=0 &\iff t_0+t_0+8+16t_0-5=0\\ &\iff 18t_0=-3\\ &\iff t_0=\frac{-1}{6}\end{aligned}$$

Le point H a donc pour coordonnées : $\left(\frac{-1}{6}\,;-\frac{-1}{6}\,;2+4\times\frac{-1}{6}\right)$ soit $\mathrm{H}\left(-\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{4}{3}\right)$.

5. a. Comme le repère est orthonormé :

- $\mathrm{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(-2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$;
- $\mathrm{CB}=\sqrt{(3-0)^2+(-2-(-1))^2+(0-1)^2}=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$;

Les longueurs sont égales, donc le triangle est bien isocèle en B.

b. • Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi une médiane (et une médiatrice).

La hauteur issue de B est donc le segment [BI], où I est le milieu de [AC].

I a donc pour coordonnées : $\mathrm{I}\left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{C}}{2}\,;\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{C}}{2}\,;\frac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{C}}{2}\right)$ soit $(1\,;0\,;1)$.

- L'aire d'un triangle est donnée par : $\mathscr{A}=\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$.

Ici, on choisit comme base le segment [AC] et la hauteur correspondante, [BI].

- La distance AC est : $\mathrm{AC}=\sqrt{(0-2)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

La distance BI est : $\mathrm{BI}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{9}=3$.

On a donc : $\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}}=\dfrac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BI}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\times3}{2}=3\sqrt{2}$.

6. a. Avec les questions précédentes, on a calculé l'aire du triangle ABC, qui est l'une des quatre bases possibles pour le tétraèdre.

Si on choisit ABC comme base de ABCD, alors la hauteur correspondante est la distance séparant le quatrième sommet (ici D), du plan contenant la base ABC, c'est-à-dire le plan (ABC).

Cette distance est donc la distance séparant D de son projeté orthogonal sur (ABC), c'est-à-dire H, dont on a déterminé les coordonnées à la question **4.**.

$$\mathrm{DH}=\sqrt{\left(\frac{-1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{18}{36}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a donc : $\mathscr{V}_{\mathrm{ABCD}}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}}\times\mathrm{DH}=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\times2}{2}=1$.

Le volume du tétraèdre est bien égal à 1.

b. En faisant le même raisonnement, mais avec la base BCD et la hauteur associée, issue de A, que l'on peut noter h, on en déduit : $\mathscr{V}_{\mathrm{ABCD}}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{BCD}}\times h$.

En remplaçant par les valeurs connues, on a : $1=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{BCD}}\sqrt{2}\iff\mathscr{A}_{\mathrm{BCD}}=\dfrac{1\times3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle BCD est donc égale à $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

7. a. Avec D_k ayant pour coordonnées $(0\,;0\,;k)$ (le point D du début de l'énoncé est donc D_2).
On va chercher quand ces coordonnées vérifient l'équation du plan (ABC).

$$\begin{aligned} D_k \in (ABC) &\iff x_{D_k} - y_{D_k} + 4z_{D_k} - 5 = 0 \\ &\iff 0 - 0 + 4k - 5 = 0 \\ &\iff k = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Seul le point $D_{\frac{5}{4}}$ est sur le plan (ABC).
Son projeté orthogonal sur (ABC) est alors lui-même, par définition du projeté orthogonal.

b. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD_k}$: $\overrightarrow{AD_k}\begin{pmatrix}-2\\-1\\k-1\end{pmatrix}$. On rappelle : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.
Quelle que soit la valeur de k, ces vecteurs ne sont pas colinéaires : ils ont des ordonnées égales, mais des abscisses différentes.
Donc le vecteur $\overrightarrow{AD_k}$ n'est jamais orthogonal au plan (ABC) et donc A n'est jamais le projeté orthogonal de D_k sur (ABC).

Exercice 2 (5 points)

Partie A : modèle discret

1. On applique la relation de récurrence donnée : $V_1 = 0{,}995V_0 + 6 = 0 + 6 = 6$.
Au bout d'une heure, le modèle prévoit 6 litres de substance polluante dans le bassin.
$V_2 = 0{,}995V_1 + 6 = 5{,}97 + 6 = 11{,}97$.
Au bout de deux heures, le modèle prévoit 11,97 litres de substance polluante dans le bassin.

2. Ici, il faut initialiser la variable v à 0, pour qu'elle contienne la valeur V_0.
Ensuite, la boucle `for` va s'exécuter n fois, donc il faut que la variable v s'actualise en appliquant la relation de récurrence.
Ainsi, la relation aura été appliquée n fois, et on sera passé de V_0 (avant l'entrée dans la boucle) à V_n (après la dernière exécution de la boucle).
Cela donne donc la fonction ci-contre :

```
def volume(n):
  v = 0
  for k in range(n):
    v = 0.995*v+6
  return v
```

3. Pour tout entier naturel n, notons I_n l'inégalité : $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1\,200$.

- **Initialisation :** $V_0 = 0$ est donné, et on a calculé $V_1 = 6$ précédemment.
  On constate donc que l'inégalité I_0 est vraie.
- **Hérédité :** Pour un entier n naturel donné, si l'inégalité I_n est vraie, on a :

$$\begin{aligned} V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1\,200 &\implies 0{,}995V_n \leqslant 0{,}995V_{n+1} \leqslant 0{,}995 \times 1\,200 \quad \text{car } 0{,}995 > 0 \\ &\implies 0{,}995V_n \leqslant 0{,}995V_{n+1} \leqslant 1\,194 \\ &\implies 0{,}995V_n + 6 \leqslant 0{,}995V_{n+1} + 6 \leqslant 1\,194 + 6 \\ &\implies V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 1\,200 \end{aligned}$$

Autrement dit, l'inégalité I_n implique l'inégalité I_{n+1}.

- **Conclusion :** L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et si une inégalité est vraie au rang n, alors la suivante (au rang $n+1$) l'est aussi.

  D'après le principe de récurrence, on peut en déduire que, pour tout entier naturel n, l'inégalité I_n est vraie.

  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1\,200$.

4. D'après la question précédente, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leqslant V_{n+1}$: la suite (V_n) est croissante ; $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leqslant 1\,200$: la suite est majorée par 1 200.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (V_n) est donc convergente vers une limite ℓ qui vérifie : $\ell \leqslant 1\,200$.

La suite est donc convergente, et définie par récurrence. La fonction de récurrence est : $x \longmapsto 0{,}995x + 6$.

Cette fonction de récurrence est continue sur $\mathbb{R}$, c'est une fonction affine. Elle est donc notamment continue en ℓ.

D'après le théorème du point fixe, on peut donc affirmer que la limite de V_n est une solution de l'équation $x = 0{,}995x + 6$.

$$\begin{aligned} x = 0{,}995x + 6 &\iff 0{,}005x = 6 \\ &\iff x = \frac{6}{0{,}005} \\ &\iff x = 1\,200 \end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une unique solution, donc la limite de (V_n) ne peut être que cette solution.

Ainsi, la suite converge vers 1 200.

Remarque : Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que la quantité de substance polluante se stabilise aux alentours de 1 200 litres, d'après ce modèle.

Partie B : modèle continu

1. a. On reconnaît une équation différentielle de la forme : $y' = ay + b$, où a et b sont des réels non nuls, ici $a = -0{,}005$ et $b = 6$.

Par propriété, on sait que les solutions à ces équations différentielles sont les fonctions de la forme : $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$, où C est un réel.

Concrètement, pour l'équation (E), les solutions sont : $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} - \dfrac{6}{-0{,}005}$, où C est un réel.

C'est-à-dire : $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1\,200$, où C est un réel.

b. Puisque v est une solution de (E), on a sa forme générale, donnée précédemment.

Pour avoir la fonction particulière correspondant à v, on doit prendre en compte la condition initiale : $v(0) = 0$ qui nous permettra d'identifier la constante C.

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\iff C\,\mathrm{e}^{-0{,}005\times 0} + 1\,200 = 0 \\ &\iff C\,\mathrm{e}^{0} = -1\,200 \\ &\iff C = -1\,200 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction v est bien définie par :

$v(t) = -1\,200\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1\,200 = 1\,200\left(-\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1\right) = 1\,200\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t}\right)$.

c. On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}005t = -\infty$, donc, par composition : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}005t} = 0$.

Par limite de la somme, il vient : $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t} = 1$.

Puis, par limite du produit : $\lim\limits_{t\to+\infty} 1\,200\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t}\right) = 1\,200$.

Remarque : Là encore, le modèle prévoit que la quantité de substance polluante se stabilise aux alentours de 1 200 litres.

d. La fonction v est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall x \in [0\,;+\infty[$, $\quad v'(x) = 1200 \times \left(0 - (-0{,}005)\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}\right) = 6\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}$.

Comme 6 est strictement positif et que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on en déduit que la fonction dérivée v' est à valeurs strictement positives sur $[0\,;+\infty[$, et donc que la fonction v est strictement croissante sur cet intervalle.

2. Le volume total du bassin est de 30 000 litres.

5 % de ce total, c'est : $0{,}05 \times 30\,000 = 1\,500$ soit 1 500 L.

Comme la fonction v tend vers 1 200 quand x tend vers $+\infty$, tout en étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, cela implique que v est majorée par 1 200.

Ainsi, selon ce modèle, la quantité de substance polluante ne dépassera jamais 1 200 litres, et n'atteindra jamais le seuil qui impose un nettoyage complet.

3. On va donc résoudre l'équation : $v(t) = 50$.

$$\begin{aligned} v(t) = 50 &\iff 1\,200\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t}\right) = 50 \\ &\iff 1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t} = \frac{50}{1\,200} \\ &\iff 1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t} = \frac{1}{24} \\ &\iff -\mathrm{e}^{-0{,}005t} = \frac{-23}{24} \\ &\iff \mathrm{e}^{-0{,}005t} = \frac{23}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) = 50 &\iff -0{,}005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right) \\ &\iff t = \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0{,}005} \\ &\iff t = -200\ln\left(\frac{23}{24}\right) \\ &\iff t = 200\ln\left(\frac{24}{23}\right) \end{aligned}$$

$200\ln\left(\dfrac{24}{23}\right) \approx 8{,}511$.

Le volume de la substance dépasse les 50 litres au bout de $200\ln\left(\dfrac{24}{23}\right)$, soit environ 8,511 heures, soit environ 8 heures et 31 minutes (à la minute près).

Exercice 3 (4 points)

1. Affirmation 1 : Vraie.

Comme on choisit une personne au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions de l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

Si on traduit les informations données, on a :

- $P(O) = 0{,}52$;
- $P_O(F) = 0{,}32$;
- $P(F) = 0{,}2$.

La question posée est de déterminer $P_F(O)$.

Par définition des probabilités conditionnelles : $P_F(O) = \dfrac{P(O \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(O) \times P_O(F)}{P(F)}$

On a finalement : $P_F(O) = \dfrac{0{,}52 \times 0{,}32}{0{,}2} = \dfrac{0{,}1664}{0{,}2} = 0{,}832$, c'est bien la valeur annoncée.

Remarque : On peut tracer un arbre de probabilité pour visualiser les informations données, mais ici, toutes les probabilités utiles étaient données directement, on peut aussi s'en passer.

2. Affirmation 2 : Fausse.

Ici, on a :

- One épreuve aléatoire (le choix d'une personne au hasard dans la population) à deux issues : le succès (la personne joue de la musique professionnellement), ayant une probabilité estimée à $p = 0{,}062$, et l'échec ;
- cette épreuve aléatoire est répétée $n = 5\,000$ fois, d'une façon qui est considérée comme identique et indépendante (le choix étant assimilable à un tirage avec remise) ;
- la variable aléatoire X dénombre les succès parmi les n répétitions ;

Ces trois critères permettent d'affirmer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5\,000$ et $p = 0{,}062$.

L'utilisation de la calculatrice donne : $P(X \leqslant 340) \approx 0{,}96$.

L'écart entre cette valeur et 0,4 est donc strictement supérieur à un dixième : 0,4 n'est donc pas une valeur approchée au dixième près de cette probabilité.

3. Affirmation 3 : Vraie.

Pour tout réel strictement positif t, l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev s'écrit :

$$P\big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant t\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{t^2}$$

Comme X suit une loi binomiale, on a des propriétés pour calculer son espérance et sa variance :

$\mathrm{E}(X) = np = 5\,000 \times 0{,}062 = 310$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p) = 5\,000 \times 0{,}062 \times (1 - 0{,}062) = 290{,}78$.

On s'intéresse ici à l'évènement : $\big\{230 < X < 390\big\} \iff \big\{230 - 310 < X - 310 < 390 - 310\big\}$

$\iff \big\{-80 < X - \mathrm{E}(X) < 80\big\}$

$\iff \big\{\big|X - \mathrm{E}(X)\big| < 80\big\}$

L'évènement $\big\{230 < X < 390\big\}$ est donc l'évènement contraire de $\big\{\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant 80\big\}$.

On va donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $t = 80$: $P\big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant 80\big) \leqslant \dfrac{290{,}78}{80^2}$

Comme $\dfrac{290{,}78}{80^2} \leqslant 0{,}05$ (car une valeur approchée au centième est 0,045) on a :

$P\big(230 < X < 390\big) = 1 - P\big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geqslant 80\big) \geqslant 1 - 0{,}05$, soit $P\big(230 < X < 390\big) \geqslant 0{,}95$.

Finalement, on a bien plus de 95 % de chance que le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 290.

4. Affirmation 4 : Vraie.

On ne précise pas de rôles spécifiques au sein de l'équipe, donc les membres d'une équipe sont interchangeables, et une équipe est donc assimilable à un ensemble (non ordonné) et pas à une liste (ordonnée).

Une équipe est donc constituée de la réunion de deux sous ensembles :

- deux joueurs musiciens professionnels, choisis dans un ensemble de cardinal 4 :
  il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux musiciens professionnels ;
- trois joueurs non musiciens professionnels, choisis dans un ensemble de cardinal 6 :
  il y a $\binom{6}{3} = 20$ façons de faire ce choix ;
- la constitution d'une équipe revient à associer n'importe quel ensemble de deux musiciens professionnels à n'importe quel ensemble de trois joueurs non professionnels, et donc par principe multiplicatif, on a : $6 \times 20 = 120$ équipes différentes possibles.

Remarque : Quand une équipe est constituée, les joueurs restants forment obligatoirement l'équipe opposée, par complémentaire.
L'équipe E sera donc forcément opposée à l'équipe $\overline{E}$, et le match E contre $\overline{E}$ est le même que le match $\overline{E}$ contre E, il y a donc $\dfrac{120}{2}$ matchs différents, mais la question portait bien sur le nombre d'équipes différentes, ce nombre est bien égal à 120.

Exercice 4 (6 points)

Partie A

1. a. Puisque la tangente à $\mathscr{C}_f$ en C (d'abscisse 1), est parallèle à l'axe des abscisses, c'est donc une droite dont le coefficient directeur est 0.
On peut donc affirmer : $f'(1) = 0$.

b. Sur l'intervalle [0 ; 3], la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses (d'équation y = 0) une seule fois, au point A.
Comme l'abscisse de A est $\dfrac{1}{2}$, on en déduit que la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur [0 ; 3] est $\dfrac{1}{2}$.

2. A est le point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathscr{C}_f$.
Par propriété, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
La tangente T_A est aussi la droite (AB), d'après l'énoncé, donc son coefficient directeur est :
$\dfrac{y_\text{B} - y_\text{A}}{x_\text{B} - x_\text{A}} = \dfrac{\text{e}^2 - 0}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2\,\text{e}^2$.
On a donc : $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\,\text{e}^2$.

3. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Graphiquement, cela se traduit par une courbe qui est l'image de l'autre par une translation d'un vecteur colinéaire au vecteur dirigeant l'axe des ordonnées (généralement le vecteur $\vec{j}$, mais il n'est pas nommé dans cet énoncé).
Ceci correspond aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_\epsilon$.
Remarque : On peut aussi procéder par élimination : la courbe $\mathscr{C}_3$ représente une fonction décroissante sur un intervalle englobant au moins [0,5 ; 0,7], quand la fonction f est positive sur l'intervalle

[0,5 ; 0,7] : une primitive de f devrait être croissante sur cet intervalle, ce que n'est pas la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$.

Partie B

1. a. Soit x un réel strictement positif :

$f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3} = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+1+2} = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+1} \times \mathrm{e}^2 = (2x-1) \times \mathrm{e}^{-(2x-1)} \times \mathrm{e}^2$

Finalement, on a bien : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}} \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 \dfrac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}}$.

b. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty$.

D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x-1}}{2x-1} = +\infty$.

Donc, par limite du quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}} = 0$.

Enfin, par limite du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^2 \dfrac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Remarque : On peut donc dire que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

2. a. On va utiliser les formules pour dériver un produit et pour dériver une fonction composée, en prenant la forme de f qui est : $f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}$.

$\forall x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-2x+3} + (2x-1) \times \left(-2\,\mathrm{e}^{-2x+3}\right) = \left(2 + (2x-1) \times (-2)\right)\mathrm{e}^{-2x+3}$

$f'(x) = (2-4x+2)\,\mathrm{e}^{-2x+3} = (-4x+4)\,\mathrm{e}^{-2x+3}$

On arrive bien à l'expression annoncée.

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du même signe que l'expression affine $(-4x+4)$, décroissante sur $\mathbb{R}$et s'annulant pour $x = 1$.

On en déduit que f changera de variation en $x = 1$.

Calculons : $f(0) = (2\times 0 - 1)\,\mathrm{e}^{-2\times 0+3} = -\mathrm{e}^3$, $f(1) = (2\times 1 - 1)\,\mathrm{e}^{-2\times 1+3} = \mathrm{e}$.

On peut donc construire le tableau de variations complet de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
signe de $-4x+4$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\mathrm{e}^3$	↗	e	↘	0

3. L'unité graphique du repère est le centimètre, donc une distance de 0,3 cm se traduit par une distance de 0,3 unité graphique.

Puisque cette distance est verticale, entre le point d'abcisse α sur la courbe, de coordonnées $(\alpha\,; f(\alpha))$ et le symétrique de ce point par rapport à l'axe des abscisses, c'est-à-dire le point de coordonnées $(\alpha\,; -f(\alpha))$, la distance entre les deux points est égale à : $2f(\alpha)$.

On doit donc avoir : $2f(\alpha) = 0{,}3 \iff f(\alpha) = 0{,}15$.

Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement décroissante, et le nombre0,15 est une valeur intermédiaire entre $f(1) = \text{e} \approx 2{,}7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones (aussi appelé théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0{,}15$ admet une unique solution sur $[1\,;+\infty[$, qui est le nombre α.

Par exploration à la calculatrice, une valeur arrondie au dixième près de α est $\alpha \approx 3{,}3$.

Partie C

1. Posons u et v, les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} u(x) = (2x-1) \\ v(x) = \dfrac{-1}{2}\,\text{e}^{-2x+3} \end{cases}$

Ces fonctions sont dérivables, et, sur le même intervalle : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \text{e}^{-2x+3} \end{cases}$

Ainsi, on reconnaît : $f(x) = u(x) \times v'(x)$.

Les fonctions u' et v' étant continues, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0,5}^{3,3} f(x)\,\text{d}x \\
&= \int_{0,5}^{3,3} u(x) \times v'(x)\,\text{d}x \\
&= \Big[u(x) \times v(x)\Big]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} u'(x) \times v(x)\,\text{d}x \\
&= \left[(2x-1) \times \frac{(-1)}{2}\,\text{e}^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} 2 \times \frac{(-1)}{2}\,\text{e}^{-2x+3}\,\text{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\Big[(2x-1)\,\text{e}^{-2x+3}\Big]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} -\text{e}^{-2x+3}\,\text{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\Big[(2x-1)\,\text{e}^{-2x+3}\Big]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} \text{e}^{-2x+3}\,\text{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\left((2\times 3{,}3-1)\,\text{e}^{-2\times 3{,}3+3}\right) - (2\times 0{,}5-1)\,\text{e}^{-2\times 0{,}5+3}\Big] + \left[\frac{-1}{2}\,\text{e}^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\left(5{,}6\,\text{e}^{-3{,}6}\right) - 0\times \text{e}^{2}\Big] - \frac{1}{2}\left[\text{e}^{-2\times 3{,}3+3} - \text{e}^{-2\times 0{,}5+3}\right] \\
&= -2{,}8\,\text{e}^{-3{,}6} - \frac{1}{2}\left[\text{e}^{-3{,}6} - \text{e}^{2}\right] \\
&= -2{,}8\,\text{e}^{-3{,}6} - 0{,}5\,\text{e}^{-3{,}6} + 0{,}5\,\text{e}^{2} \\
&= 0{,}5\,\text{e}^{2} - 3{,}3\,\text{e}^{-3{,}6}
\end{aligned}$$

Comme on a : $I = 0{,}5\,\text{e}^{2} - 3{,}3\,\text{e}^{-3{,}6} \approx 3{,}6$ au dixième près, on arrive bien à l'arrondi annoncé.

2. Sur l'intervalle $[0{,}5\,;3{,}3]$, la fonction f est continue et à valeurs positives, donc l'aire du domaine délimité par : la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0{,}5$ et $x = 3{,}3$ est donnée par l'intégrale I, dont on a calculé une valeur approchée à la question précédente.

En doublant cette surface, cela revient à considérer un domaine deux fois plus grand, qui serait délimité par $\mathscr{C}_f$ et sa courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses, entre les abscisses 0,5 et 3,3.

Si on utilise l'approximation $\alpha \approx 3{,}3$, on peut donc considérer que $2I$ est une approximation de la surface grisée.

Ainsi le volume du porte-clé est proche de : $2I \times 0{,}2 \approx 2 \times 3{,}6 \times 0{,}2$.

On peut donc donner une valeur approchée de $1{,}44\,\text{cm}^3$, soit, au dixième près $1{,}4\,\text{cm}^3$.

Remarque : Ce qui suit n'était absolument pas attendu.

Ici, le calcul fait intervenir trois approximations :

- $\alpha \approx 3{,}3$;
- le fait que l'aire grisée est approchée par $2I$, quand on devrait avoir $2\displaystyle\int_{0,5}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$;
- et enfin le fait que I est proche de $3{,}6\,\text{cm}^2$.

Sans rentrer dans le détail, ces approximations enchaînées ici permettent quand même d'avoir une valeur finale avec la précision requise.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.