Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SI, veuillez visiter :
bac-maths-si.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale)

Corrigé

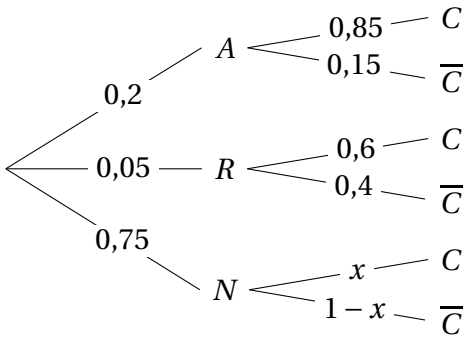
Voie générale – Série spécialité J1 – Antilles, Guyane – 16 juin 2026

A. P. M. E. P.

Exercice 1 (4 points)

Partie A

1. L'arbre des probabilités représentant la situation est :



2. Le réacteur est en arrêt et il subit un contrôle correspond à l'évènement $A \cap C$.

$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}2 \times 0{,}85 = 0{,}17$

La probabilité que le réacteur soit à l'arrêt et qu'il subisse un contrôle est égale à 0,17.

3. On sait de plus que la probabilité qu'un réacteur du parc nucléaire soit contrôlé est égale à 0,35 c'est-à-dire $P(C) = 0{,}35$.

Les évènements A, R et N forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(C) = P(A \cap C) + P(R \cap C) + P(N \cap C) &\iff P(C) = P(A) \times P_A(C) + P(R) \times P_R(C) + P(N) \times P_N(C) \\ &\iff 0{,}35 = 0{,}2 \times 0{,}85 + 0{,}05 \times 0{,}6 + 0{,}75 \times x \\ &\iff 0{,}35 - 0{,}17 - 0{,}03 = 0{,}75x \\ &\iff 0{,}15 = 0{,}75x \\ &\iff x = \frac{0{,}15}{0{,}75} = 0{,}2 \end{aligned}$$

On a bien : la probabilité x est égale à 0,2.

4. La probabilité qu'un réacteur fonctionne normalement sachant qu'il subit un contrôle correspond à $P_C(N)$. Par définition des probabilités conditionnelles :

$P_C(N) = \dfrac{P(N \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}2}{0{,}35} = \dfrac{3}{7} \approx 0{,}428\,6$

La probabilité qu'un réacteur fonctionne normalement sachant qu'il subit un contrôle est égale à $\dfrac{3}{7}$ soit environ 0,43.

Partie B

1. a. La variable aléatoire prend trois valeurs : 0 (quand le réacteur est à l'arrêt, il produit 0 GWh), 10 et 16.

On a : $\{X = 0\} = A$; $\{X = 10\} = R$ et $\{X = 16\} = N$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

k	0	10	16
p_k	0,20	0,05	0,75

b. $\mathrm{E}(X) = 0 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}05 + 16 \times 0{,}75 = 12{,}5$.

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = 0^2 \times 0{,}2 + 10^2 \times 0{,}05 + 16^2 \times 0{,}75 - 12{,}5^2 = 40{,}75$.

L'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 12,5 et sa variance $\mathrm{V}(X)$ est égale à 40,75.

2. a. Ici, on va utiliser deux éléments pour justifier nos calculs :

- **(1)** les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{12} suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire X ;
- **(2)** les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{12} sont indépendantes.

Avec ceci :

$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{12})$

$= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_{12})$ par linéarité de l'espérance ;

$= 12 \times \mathrm{E}(X)$ **(1)**

$= 12 \times 12{,}5$

$= 150$

$\mathrm{V}(S) = \mathrm{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{12})$

$= \mathrm{V}(X_1) + \mathrm{V}(X_2) + \cdots + \mathrm{V}(X_{12})$ **(2)**

$= 12 \times \mathrm{V}(X)$ **(1)**

$= 12 \times 40{,}75$

$= 489$

On a bien : $\mathrm{E}(S) = 150$ et $\mathrm{V}(S) = 489$.

b. Déterminons la probabilité d'éviter le risque de surcharge et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité c'est-à-dire la probabilité que la production totale journalière des 12 réacteurs soit comprise strictement entre 100 GWh et 200 GWh.

On a : $P(100 < S < 200) = P(-50 < S - 150 < 50) = 1 - P\left(\left|S - 150\right| \geqslant 50\right)$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall\, t \in \mathbb{R}^{*+}$, $P\left(\left|S - \mathrm{E}(S)\right| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(S)}{t^2}$.

Avec $t = 50$ on a : $P\left(\left|S - 150\right| \geqslant 50\right) \leqslant \dfrac{489}{50^2}$;

soit $P\left(\left|S - 150\right| \geqslant 50\right) \leqslant 0{,}1956$.

On a donc : $1 - P\left(\left|S - 150\right| \geqslant 50\right) \geqslant 1 - 0{,}1956$.

D'où : $P(100 < S < 200) \geqslant 0{,}8044$

La probabilité d'éviter le risque de surcharge et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité est donc supérieure à 0,80.

Exercice 2 (6 points)

Partie A : étude du premier protocole

1. L'équation différentielle (E) : $y' = -\dfrac{3}{10}y + 1$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{3}{10}$ et $b = 1$.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

or : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{-\dfrac{3}{10}} = -\dfrac{10}{3}$.

Sur $[0\,;+\infty[$, les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions de la forme :

$t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. La fonction q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E), donc il existe un réel C tel que pour tout réel positif t, $q(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3}$.

Or on sait $q(0) = 1$ donc $C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}\times 0} + \dfrac{10}{3} = 1$.

D'où $C + \dfrac{10}{3} = 1$ soit $C = 1 - \dfrac{10}{3} = -\dfrac{7}{3}$.

Finalement, pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty[$, $q(t) = -\dfrac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3}$.

3. $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{3}{10}t = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} = 0$

par produit et somme, on a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{10}{3}$.

On a donc : $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = \dfrac{10}{3}$.

Dans le contexte de l'exercice, à long terme, la quantité de médicament présente dans le sang du patient se stabilisera vers $\dfrac{10}{3}$ mg.

4. Pour étudier les variations de la fonction q sur $[0\,;+\infty[$, étudions le signe de sa dérivée.

Pour tout réel positif t, $q'(t) = -\dfrac{7}{3} \times \dfrac{-3}{10}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} = \dfrac{7}{10}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}$.

Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc pour tout réel positif t, $q'(t) > 0$.

La fonction q est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

5. Déterminons au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient.

On sait qu'il y a un risque lorsque la quantité présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg.

Nous allons donc résoudre l'inéquation $q(t) \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
q(t) \geqslant 3 &\iff \frac{10}{3} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \geqslant 3\\
&\iff \frac{10}{3} - 3 \geqslant \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}\\
&\iff \frac{1}{3}\times\frac{3}{7} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \quad \text{car } \frac{3}{7} > 0\\
&\iff \ln\left(\frac{1}{7}\right) \geqslant -\frac{3}{10}t \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}\\
&\iff -\ln(7) \geqslant -\frac{3}{10}t\\
&\iff -\ln(7)\times\frac{-10}{3} \leqslant t \quad \text{car } -\frac{10}{3} < 0\\
&\iff \frac{10\ln(7)}{3} \leqslant t
\end{aligned}$$

Le médicament présente un risque pour le patient $\dfrac{10\ln(7)}{3}$ heures, soit environ 6,5 heures après l'injection initiale.

6. Le traitement devant durer au moins 7 heures, le protocole présente un risque pour le patient car la concentration dépassera les 3 mg avant la fin du traitement.

Partie B : étude du second protocole

1. La quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures donc elle est multipliée par $1 - \dfrac{30}{100}$ soit 0,7.

Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures donc on ajoute 0,75.

On a donc, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0{,}7 \times u_n + 0{,}75$.

2. **a.** Pour tout entier naturel n, on pose P_n l'affirmation : « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a :
  $u_0 = 1$ et $u_1 = 0{,}7 \times u_0 + 0{,}75 = 0{,}7 \times 1 + 0{,}75 = 1{,}45$
  On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$
  L'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** soit n un entier naturel ($n \geqslant 0$), on suppose que pour cet entier n, l'affirmation P_n est vraie.
  P_n est vraie $\implies u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
  $\implies 0{,}7 \times u_n \leqslant 0{,}7 \times u_{n+1} \leqslant 0{,}7 \times 4 \quad$ car $\quad 0{,}7 > 0$
  $\implies 0{,}7 \times u_n + 0{,}75 \leqslant 0{,}7 \times u_{n+1} + 0{,}75 \leqslant 0{,}7 \times 4 + 0{,}75$
  $\implies u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3{,}55 \leqslant 4$
  $\implies P_{n+1}$ est vraie
- **Conclusion :** la propriété P_0 est vraie, et pour n entier naturel, la véracité de P_n est héréditaire, donc par principe de récurrence :
  Pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire : $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b. Pour tout entier naturel n : $\quad u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente vers une limite ℓ telle que $1 \leqslant \ell \leqslant 4$.

c. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}7x + 0{,}75$, une fonction affine, donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

Résolvons l'équation : $x = 0{,}7x + 0{,}75 \iff x - 0{,}7x = 0{,}75$

$$\iff 0{,}3x = 0{,}75$$
$$\iff x = \frac{0{,}75}{0{,}3}$$
$$\iff x = 2{,}5$$

La suite (u_n) a pour limite $\ell = 2{,}5$.

d. La suite (u_n) est croissante donc elle est majorée par sa limite : pour tout entier n, $u_n \leqslant 2{,}5$.

D'après ce modèle, le traitement ne présente donc pas de risque pour le patient, car, quelle que soit la durée du traitement, la quantité de médicament sera toujours inférieure ou égale à 2,5 mg soit en dessous de la quantité toxique.

3. a. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2{,}5$.

Pour tout entier naturel n :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2{,}5 \\ &= 0{,}7u_n + 0{,}75 - 2{,}5 \\ &= 0{,}7 \times (v_n + 2{,}5) - 1{,}75 \\ &= 0{,}7 \times v_n + 1{,}75 - 1{,}75 \\ &= 0{,}7v_n. \end{aligned}$$

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite géométrique : la suite (v_n) est donc une suite géométrique, de raison $q = 0{,}7$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 2{,}5 = 1 - 2{,}5 = -1{,}5$.

b. Par propriété des suites géométriques, le terme général de la suite (v_n) est donc : $v_n = v_0 \times q^n$

Donc, pour tout entier naturel n, $v_n = -1{,}5 \times 0{,}7^n$.

D'où $u_n = v_n + 2{,}5 = -1{,}5 \times 0{,}7^n + 2{,}5$.

On a bien, pour tout entier naturel n, $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}7^n$.

4. La quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépassera 2,4 mg lorsque $u_n > 2{,}4$.

Résolvons cette inéquation : $u_n > 2{,}4 \iff 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}7^n > 2{,}4$

$$\iff 2{,}5 - 2{,}4 > 1{,}5 \times 0{,}7^n$$
$$\iff \frac{0{,}1}{1{,}5} > 0{,}7^n$$
$$\iff \ln\left(\frac{1}{15}\right) > \ln\left(0{,}7^n\right)$$
$$\iff -\ln(15) > n\ln(0{,}7)$$
$$\iff \frac{-\ln(15)}{\ln(0{,}7)} < n \quad \text{car } \ln(0{,}7) < 0.$$

or $\dfrac{-\ln(15)}{\ln(0{,}7)} \approx 7{,}59$, donc, d'après ce modèle, la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépassera 2,4 mg au bout de 8 injections supplémentaires.

Exercice 3 (4 points)

1. Affirmation 1 : Vraie

On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}x_\text{B}-x_\text{A}\\y_\text{B}-y_\text{A}\\z_\text{B}-z_\text{A}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1-2\\\sqrt{2}-\sqrt{2}\\0-(-1)\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}x_\text{C}-x_\text{A}\\y_\text{C}-y_\text{A}\\z_\text{C}-z_\text{A}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2-2\\0-\sqrt{2}\\-1-(-1)\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

Et : $\overrightarrow{\text{SA}}\begin{pmatrix}x_\text{A}-x_\text{S}\\y_\text{A}-y_\text{S}\\z_\text{A}-z_\text{S}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{SA}}\begin{pmatrix}2-(-1)\\\sqrt{2}-\sqrt{2}\\-1-(-4)\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{SA}}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\overrightarrow{\text{SA}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=3\times(-1)+0\times0+3\times1=-3+0+3=0$. $\overrightarrow{\text{SA}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont orthogonaux ;
- $\overrightarrow{\text{SA}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=3\times0+0\times(-\sqrt{2})+3\times0=0$ $\overrightarrow{\text{SA}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{\text{SA}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (ABC), donc il est normal au plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{\text{SA}}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Affirmation 2 : Fausse

On a : $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix}x_\text{B}-x_\text{S}\\y_\text{B}-y_\text{S}\\z_\text{B}-z_\text{S}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix}1-(-1)\\\sqrt{2}-\sqrt{2}\\0-(-4)\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$.

La droite (SB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$.

Par lecture de sa représentation paramétrique, on peut dire que (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs ont des coordonnées clairement non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les droites (SB) et (d) ne sont donc pas parallèles (ni strictement, ni confondues).

Elles peuvent donc être sécantes, ou non coplanaires.

Pour trancher, cherchons à établir si elles ont un point commun.

Une représentation paramétrique de (SB) est : $\begin{cases}x=x_\text{S}+x_{\overrightarrow{\text{SB}}}\times t\\y=y_\text{S}+y_{\overrightarrow{\text{SB}}}\times t\\z=z_\text{S}+z_{\overrightarrow{\text{SB}}}\times t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

Soit, en remplaçant par les valeurs connues : $\begin{cases}x=-1+2t\\y=\sqrt{2}\\z=-4+4t\end{cases}$, où $t\in\mathbb{R}$

Le point de paramètre k sur (d) est confondu avec le point de paramètre t sur (AB) si et seulement si $(k\,;t)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 2-k=-1+2t \\ \sqrt{2}k=\sqrt{2} \\ -1-k=-4+4t \end{cases} \iff \begin{cases} 3-k=2t \\ k=1 \\ 3-k=4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t=3-1=2 \\ k=1 \\ 4t=3-1=2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1 \\ k=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Les équations 1 et 3 du système sont incompatibles.

Le système n'a pas de solution.

Il n'y a donc aucun point commun entre les droites (SB) et (d), qui sont donc non coplanaires, et pas sécantes.

Les droites (SB) et d ne sont pas sécantes.

3. Affirmation 3 : Vraie

Par lecture de sa représentation paramétrique, on peut dire que (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$.

Par lecture de son équation cartésienne, on peut dire qu'un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

$\vec{n}\cdot\vec{u}=-1\times1+\sqrt{2}\times0+(-1)\times(-1)=-1+0+1=0$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc la droite d est parallèle au plan P.

4. Affirmation 4 : Vraie

Le point H est le projeté orthogonal de S sur le plan P si : $\begin{cases} H\in P; \\ \text{La droite (SH) est orthogonale au plan } P. \end{cases}$

- $x_{\text{H}}-z_{\text{H}}+1=-3-(-2)+1=-3+2+1=0$
  Donc H est bien un point du plan P.
- On a : $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix}x_{\text{H}}-x_{\text{S}}\\y_{\text{H}}-y_{\text{S}}\\z_{\text{H}}-z_{\text{S}}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\\sqrt{2}-\sqrt{2}\\-2-(-4)\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$.
  Les vecteurs $\overrightarrow{\text{SH}}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc la droite (SH) est orthogonale au plan P.

Le point H de coordonnées $(-3\,;\sqrt{2}\,;-2)$ est donc le projeté orthogonal de S sur le plan P.

Exercice 4 (6 points)

Partie A : lecture graphique

1. $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, donc de la tangente T.

Le point B appartient à cette tangente donc : $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-0}{0-1} = 2$.

2. La courbe représentative de la fonction f semble au-dessus de la tangente T sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ or la courbe représentative d'une fonction concave est située en dessous de toutes ses tangentes.

La fonction f n'est donc pas concave sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

3. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A, donc A semble être un point d'inflexion. Avec la précision de lecture permise par le graphique, on en déduit : $f''(1) = 0$.

Partie B : étude de fonction

1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} 2x-1 = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \ln(2x-1) = -\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} x = \dfrac{1}{2}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x\ln(2x-1) = 0 \\ &\iff \ln(2x-1) = 0 \quad \text{car } x > 0 \text{ sur } \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\\ &\iff 2x-1 = 1 \\ &\iff 2x = 2 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : $x = 1$.

3. a. f' est de la forme $f = \ln(w) + \dfrac{u}{v}$, avec $\begin{cases} w(x) = 2x-1 \\ u(x) = 2x \\ v(x) = 2x-1 \end{cases}$. On a donc $\begin{cases} w'(x) = 2 \\ u'(x) = 2 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$.

En appliquant les formules de dérivation, on sait que $f'' = \dfrac{w'}{w} + \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Donc, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{2x-1} + \frac{2(2x-1) - 2\times 2x}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x-1)+4x-2-4x}{(2x-1)^2} = \frac{4x-2-2}{(2x-1)^2} = \frac{4x-4}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, on a bien : $\quad f''(x)=\dfrac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$.

b. Pour déterminer les abscisses des point d'inflexion de $\mathscr{C}$ étudions le signe de $f''(x)$.

Un carré étant toujours positif, $f''(x)$ est du signe de $x-1$.

On a donc :

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de $(x-1)$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=1$ donc le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion pour $\mathscr{C}$.

De plus, $f(1)=1\times\ln(2\times1-1)=\ln(1)=0$.

Le point d'inflexion a pour coordonnés (1;0) et est donc l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. a. $1\leqslant x\leqslant 2 \Longrightarrow 2\leqslant 2x\leqslant 4$

$\Longrightarrow 2-1\leqslant 2x-1\leqslant 4-1$

$\Longrightarrow 1\leqslant 2x-1\leqslant 3$

$\Longrightarrow \ln(1)\leqslant\ln(2x-1)\leqslant\ln(3)$ car la fonction ln est strictement croissante sur $[1\,;3]$

$\Longrightarrow 0\leqslant\ln(2x-1)$.

De plus $x>0$ sur l'intervalle $[1\,;2]$ donc, par produit, $f(x)>0$ sur l'intervalle $[1\,;2]$.

La fonction f est bien positive sur l'intervalle $[1\,;2]$.

b.
$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x&=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln(2x-1)\right]_1^2\\&=\left(\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\ln(2\times2-1)\right)-\left(\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{8}\ln(2\times1-1)\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln(3)-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ln(1)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln(3)-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0\\&=1+\frac{1}{8}\ln(3)\end{aligned}$$

On a bien : $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x=1+\frac{1}{8}\ln(3)$.

c. La fonction f étant positive et continue sur l'intervalle $[1\,;2]$, l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est égale à

$\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 x\ln(2x-1)\,\mathrm{d}x$

$x\longmapsto x\ln(2x-1)$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases}u'(x)=x\\v(x)=\ln(2x-1)\end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \dfrac{2}{2x-1} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[1\,;2]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1\,;2]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

d'où $\mathscr{A} = \left[\dfrac{1}{2}X^2\ln(2x-1)\right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}\times 4\ln(3) - \dfrac{1}{2}\ln(1) - 1 - \dfrac{1}{8}\ln(3)$ d'après la question précédente

$= \dfrac{15}{8}\ln(3) - 1$

L'aire $\mathscr{A}$ est égale à $\dfrac{15}{8}\ln(3) - 1$ unité d'aire.

Partie C : généralisation

1. Étudions le signe de $f''(x)$.

$ax - 2 = 0 \iff x = \dfrac{2}{a}$ et $a > 0$ donc :

x	$\frac{1}{a}$		$\frac{2}{a}$		$+\infty$
signe de a		+		+	
signe de $ax-2$		−	0	+	
signe de $(ax-1)^2$		+		+	
signe de $f_a''(x)$		−	0	+	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = \dfrac{2}{a}$.

De plus : $f_a\left(\dfrac{2}{a}\right) = \dfrac{2}{a}\ln\left(a\times\dfrac{2}{a} - 1\right) = \dfrac{2}{a}\ln(1) = 0$.

Pour tout réel a strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a de coordonnées $\left(\dfrac{2}{a}\,;0\right)$

2. Pour tout réel a appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les points A_a ont une ordonnée nulle, ils sont donc tous sur l'axe des abscisses et ils sont donc alignés.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.